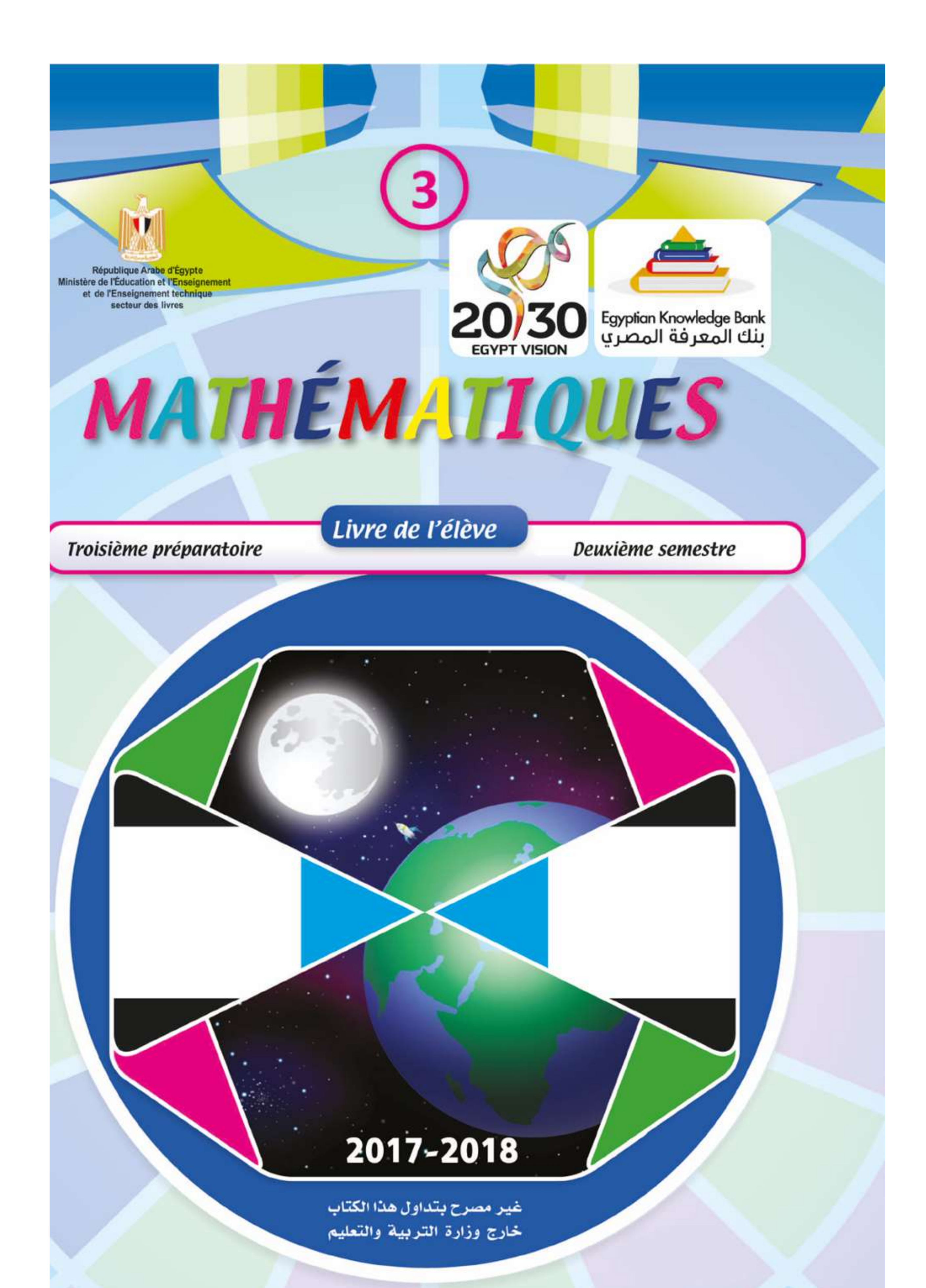


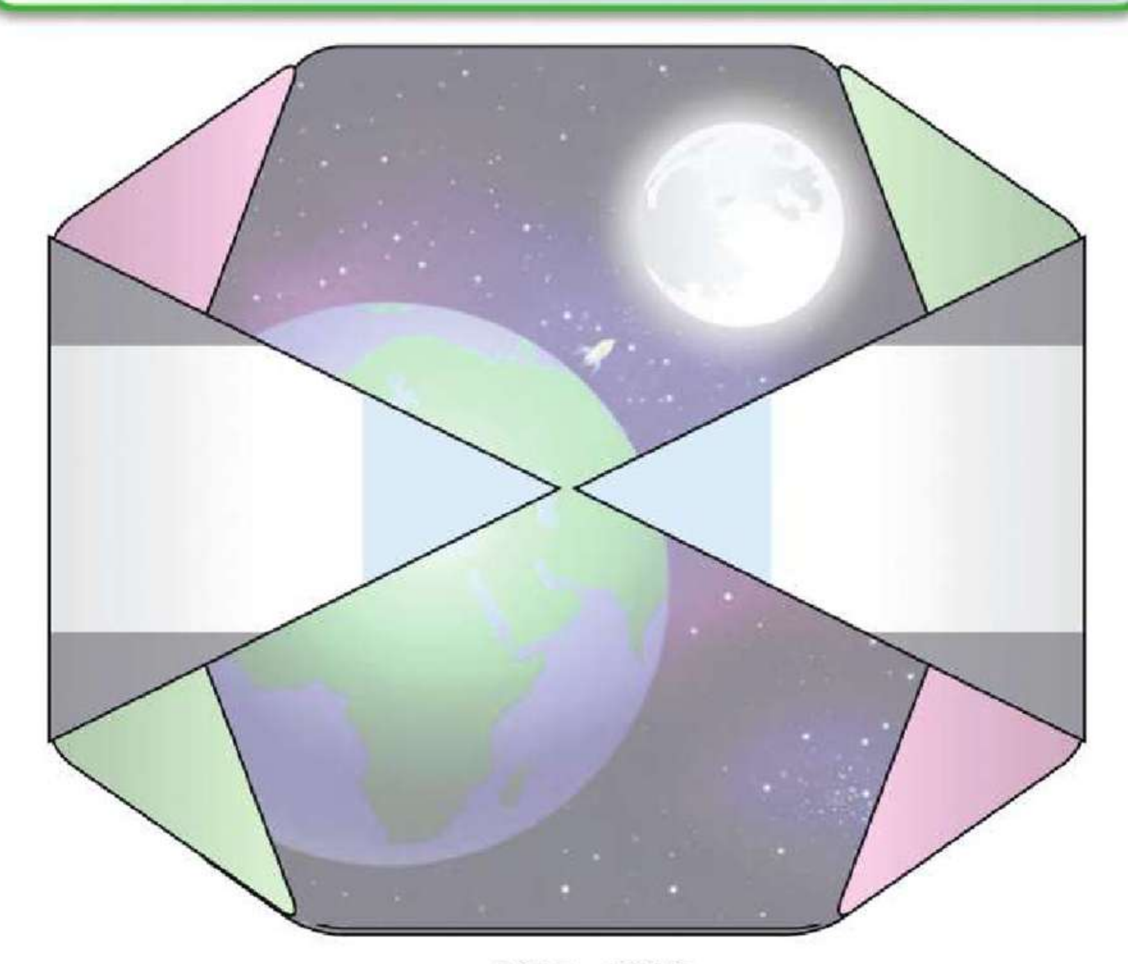
3
République Arabe d'Égypte
Ministère de l'Éducation et l'Enseignement
et de l'Enseignement technique
secteur des livres
20/30
EGYPT VISION
Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري
MATHÉMATIQUES
Livre de l'élève
Troisième préparatoire
Deuxième semestre
2017-2018
غير مصرح بتداول هذا الكتاب
خارج وزارة التربية والتعليم



République Arabe d'Égypte
Ministère de l'Éducation et l'Enseignement
et de l'Enseignement technique
secteur des livres

MATHÉMATIQUES

Troisième préparatoire — Livre de l'élève — Deuxième semestre



2017 - 2018


بسم اللّه الرحمن الرحيم

Rédigé par

M. Omar Fouad Gaballa

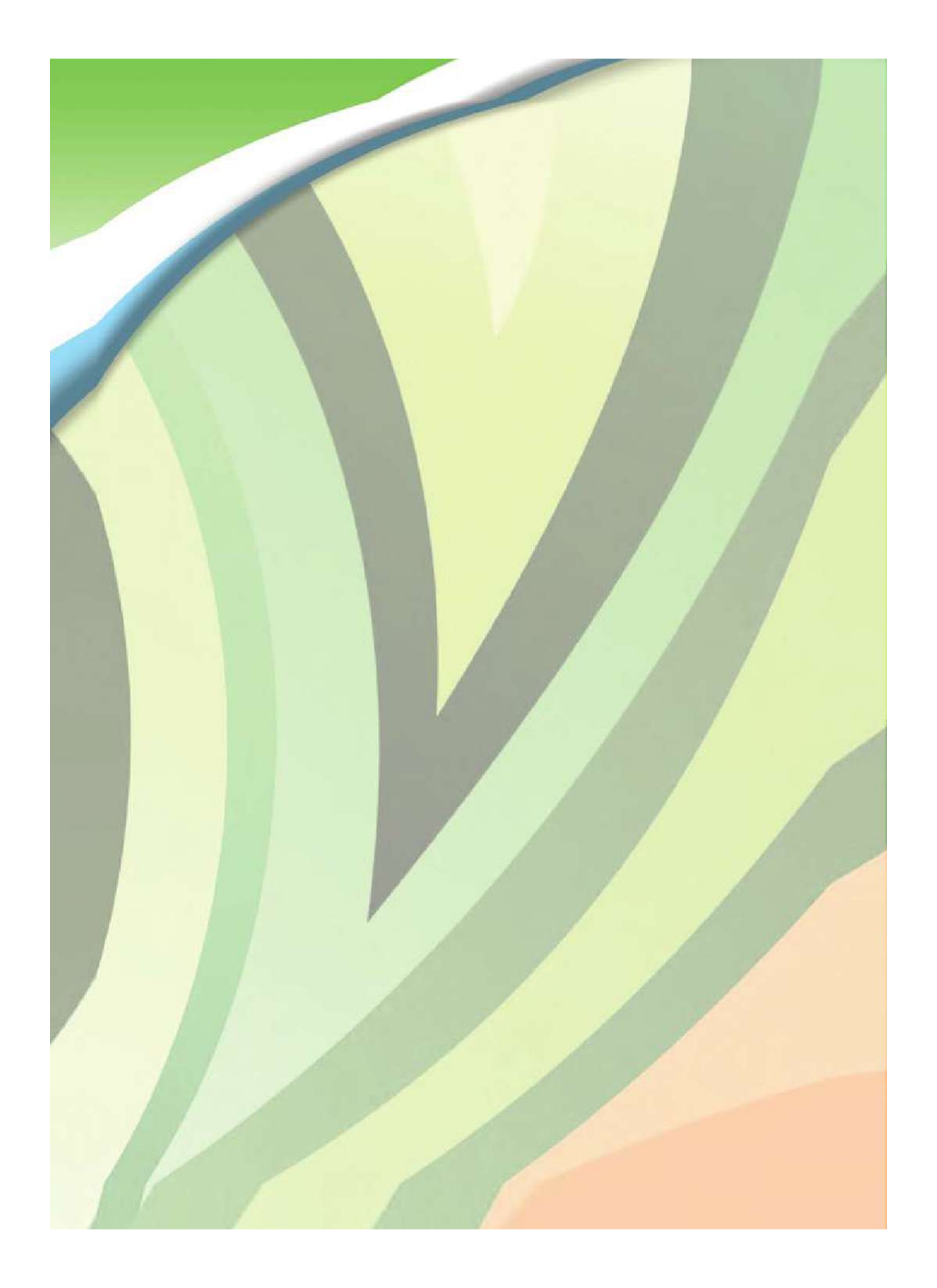
Prof.Dr. Afaf Abo-ElFoutoh Saleh

Dr. Essam Wasfy Rouphaiel

M. Serafiem Elias Skander

M. Kamal Yones Kabsha

Traduction révisée par
l'Institut Français d' Egypte
I.F.E



Introduction

Cher élève,

Nous avons le plaisir de te présenter le manuel de mathématiques de troisième préparatoire. Nous avons tenu à faire de l'apprentissage des mathématiques un travail intéressant et utile qui a son application dans la vie pratique et dans l'apprentissage des autres matières scolaires afin que tu sentes l'importance de l'étude des mathématiques et sa valeur et que tu apprécies le rôle des mathématiciens. Ce manuel présente les activités comme éléments essentiels, et nous avons essayé de présenter le contenu scientifique d'une manière simple pour t'aider à construire tes connaissances mathématiques et à acquérir des méthodes de raisonnement convenables qui favorisent la créativité.

Ce manuel comporte plusieurs unités et chaque unité comporte plusieurs leçons. Les images et les couleurs sont utilisés pour illustrer les notions mathématiques, les propriétés des figures, en utilisant un langage facile et adapté qui tient compte des connaissances acquises. Nous avons également tenu à t'entraîner à découvrir les connaissances visées pour développer ta capacité à l'auto-apprentissage. La calculatrice et l'ordinateur sont utilisés à chaque fois que l'occasion se présente. Chaque leçon comporte des exercices et chaque Unité comporte des exercices généraux, des activités concernant le portfolio et une épreuve. A la fin du manuel, nous proposons des épreuves générales, pour t'aider à réviser la totalité du programme, et des indications pour les réponses de certains exercices.

Nous espérons que ce travail sera bénéfique pour toi et pour notre chère Egypte.

Les auteurs



Algèbre

Unité 1: Equations

Unité 2: Fonctions rationnelles et opérations

Probabilité

Unité 3: Probabilité

Géométrie plane

Unité 4: Géométrie plane

Unité 5:

SYMBOLES MATHÉMATIQUES UTILISÉS

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels	$\perp$	perpendiculaire à
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers	$//$	parallèle à
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels	$\overline{AB}$	le segment $\overline{AB}$
$\mathbb{Q}'$	ensemble des nombres irrationnels	$\overrightarrow{AB}$	la demi-droite $\overrightarrow{AB}$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels	$\overleftrightarrow{AB}$	la droite $\overleftrightarrow{AB}$
$\sqrt{a}$	racine carrée de a	$m(\angle A)$	mesure de l'angle A
$\sqrt[3]{a}$	racine cubique de a	$m(\widehat{AB})$	mesure de l'arc AB
$[a, b]$	intervalle fermé	$\sim$	semblable à
$]a, b[$	intervalle ouvert	$>$	plus grand que
$[a, b[$	intervalle semi-fermé	$\geqslant$	plus grand ou égal à
$]a, b]$	intervalle semi-ouvert	$<$	plus petit que
$[a, +\infty[$	intervalle illimité	$\leqslant$	plus petit ou égal à
$\equiv$	superposition	$p(A)$	probabilité de l'événement A
card (A)	nombre d'éléments de A	$\overline{x}$	moyenne arithmétique
E	espace des éventualités	σ	écart type
$\sum$	somme		



Unité (1)

Equations

Fonctions rationnelles et opérations

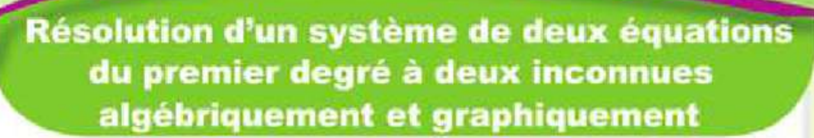
Un joueur a lancé un ballon qui a suivi le trajet indiqué par la figure ci-dessus.

Cette courbe représente une fonction, que tu étudieras, appelée une fonction du second degré.

Unité (1)

Equations





Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues algébriquement et graphiquement



Apprendre

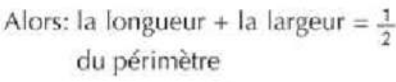
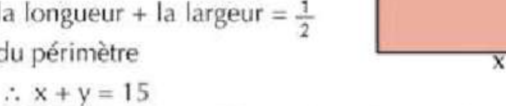
☆ Comment résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Expressions de base

☆ Équation du premier degré.
☆ Résolution algébrique.
☆ Résolution graphique
☆ Ensemble de définition.
☆ Ensemble-solution.

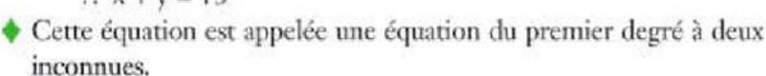
Réfléchis et discute

Si le périmètre d'un rectangle est égal à 30 cm, quelles sont les valeurs possibles de sa longueur et de sa largeur. Si la longueur du rectangle = x cm et la largeur du rectangle = y cm

Alors: la longueur + la largeur = $\frac{1}{2}$ du périmètre

$\therefore x + y = 15$



- Cette équation est appelée une équation du premier degré à deux inconnues.
- Résoudre cette équation consiste à trouver un couple de nombres réels vérifiant cette équation.
- Le couple (-5, 20) peut-il être une solution de l'équation précédente? Tu pourras répondre à cette question après l'exposition suivante
- Nous pouvons résoudre l'équation en la mettant sous l'une des deux formes suivantes:



(1) $y = 15 - x$ (2) $x = 15 - y$

En attribuant une valeur quelconque à l'une des deux variables, on obtient la valeur de l'autre variable.

Si $x \in R$ on obtient des solutions dans $R \times R$ d'où, une équation du premier degré a une infinité de solutions dont une solution est sous la forme d'un couple (x , y) où x et la première composante et y est la seconde composante.

Pour $x = 8 \therefore y = 15 - 8 = 7 \therefore (8 , 7)$ est une solution de l'équation
Pour $x = 9.5 \therefore y = 15 - 9.5 = 5.5 \therefore (9.5 , 5.5)$ est une solution de l'équation
Pour $x = 4\sqrt{7} \therefore y = 15 - 4\sqrt{7}$
$\therefore (4\sqrt{7} , 15 - 4\sqrt{7})$ est une solution de l'équation

(1) Résolution d'équations du premier degré à deux inconnues graphiquement :



1 Trouve l'ensemble-solution de l'équation $2x - y = 1$

Solution

On écrit l'équation sous la forme $y = 2x - 1$

Pour $x = 0 \therefore y = -1 \therefore (0, -1)$ est une solution de l'équation

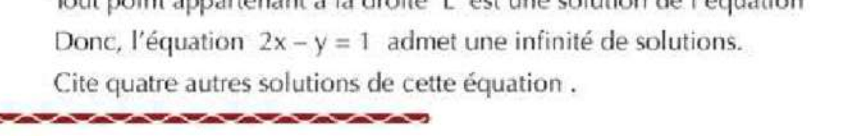
Pour $x = 2 \therefore y = 3 \therefore (2, 3)$ est une solution de l'équation

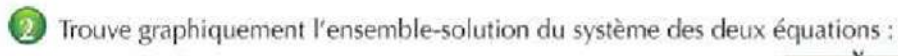
On trace la droite L passant par les deux points représentant les deux couples $(0, -1)$ et $(2, 3)$.

Tout point appartenant à la droite L est une solution de l'équation

Donc, l'équation $2x - y = 1$ admet une infinité de solutions.

Cite quatre autres solutions de cette équation .





2 Trouve graphiquement l'ensemble-solution du système des deux équations :

$L_1 : y = 2x - 3$ et $L_2 : x + 2y = 4$

Solution

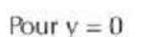
Dans l'équation $y = 2x - 3$

Pour $X = 0 \therefore y = -3 \therefore (0, -3)$ est une solution de l'équation

Pour $X = 4 \therefore y = 5 \therefore (4, 5)$ est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_1ireprésente la première équation. On écrit l'équation $x + 2y = 4$ sous la forme $x = 4 - 2y$

(1)



Pour $y = 0$ $\therefore x = 4$ $\therefore (4, 0)$ est une solution de l'équation

Pour $y = 1$ $\therefore x = 2$ $\therefore (2, 1)$ est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_2représente la deuxième équation **(2)**

D'après la figure, $L_1 \cap L_2$ est le point a $(2, 1)$

$\therefore$ L'ensemble-solution du système des deux équations est $\{(2, 1)\}$

Pour t'entraîner :

Trouve graphiquement l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

1 $2x + y = 0$ $\quad$ $x + 2y = 3$

2 $y = 3x - 1$ $\quad$ $x - y + 1 = 0$





Trouve graphiquement l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $3x + y = 4$ (1) , $2y + 6x = 3$ (2)

(2) $3x + 2y = 6$ (1) , $y = 3 - \frac{3}{2}x$ (2)

Solution

(1) On écrit l'équation (1) sous la forme $y = 4 - 3x$

Pour $x = 0$ $\therefore$ $y = 4$, $(0, 4)$ est une solution de l'équation

Pour $x = 2$ $\therefore$ $y = -2$, $(2, -2)$ est une solution de l'équation

L_1 Dans la figure ci-contre, la droite représente l'équation (1)

On écrit l'équation (2) sous la forme $y = \frac{3 - 6x}{2}$

Pour $x = 0$ $\therefore$ $y = \frac{3}{2}$ d'où $(0, \frac{3}{2})$ est une solution de l'équation

Pour $x = 1$ $\therefore$ $y = \frac{-3}{2}$ d'où $(1, \frac{-3}{2})$ est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_2 représente l'équation (2)

$\because$ $L_1 \cap L_2 = \phi$ $\therefore$ Il n'y a aucune solution commune aux deux équations.

Si $L_1 // L_2$ il n'y a aucune solution aux deux équations (1) et (2)

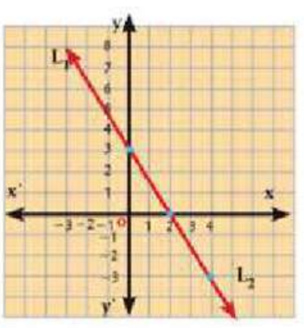
D'après la géométrie analytique :

La pente de la droite $L_1 = \frac{-3}{1} = -3$ et la pente de la droite $L_2 = \frac{-6}{2} = -3$ $\therefore$ $L_1 // L_2$

(2)

On écrit l'équation (2) sous la forme $2y = 6 - 3X$

Donc $3X + 2Y = 6$ qui est la même forme que l'équation (1) La figure ci-contre montre la représentation graphique des deux équations par deux droites confondues.



On dit que: Les deux équations (1) et (2) admettent une infinité de solutions et l'ensemble- solution est $\{(x, y): y = 3 - \frac{3}{2}x\}$

Pour t'entraîner :

Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

1. $3x + y = 5$, $y + 3x = 8$
2. $2x + y = 4$, $8 - 2y = 4x$

(2) *Résolution d'équations du premier degré à deux inconnues algébriquement .*

Nous pouvons résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en se débarrassant de l'une des deux variables pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue. La résolution de cette équation permet de trouver la valeur de cette inconnue. En remplaçant cette inconnue par sa valeur dans l'une des deux équations on obtient la valeur de l'autre inconnue.



Trouve l'ensemble-solution du système des deux équations :

$2x - y = 3$ (1) et $x + 2y = 4$ (2)

Solution **(Méthode de l'élimination)**

De l'équation (1) on a $y = 2x - 3$

En remplaçant y par cette valeur dans l'équation (2) on obtient $\therefore x + 2(2x - 3) = 4$

D'où : $x + 4x - 6 = 4$ $\therefore 5x = 10$ $\therefore x = 2$

En remplaçant x par 2 en (1) $\therefore y = 2 \times 2 - 3$ $\therefore y = 1$

$\therefore$ L'ensemble-solution du système des deux équations est = {(2, 1)}

Pour t'entraîner **(Méthode de l'élimination)**

On élimine l'une des deux variables dans les deux équations (par addition ou par soustraction) pour obtenir une troisième équation à une seule variable. En résolvant l'équation obtenue, on trouve la valeur de cette variable

$2x - y = 3$ (1) et $x + 2y = 4$ (2)

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par 2 $\therefore 4x - 2y = 6$ (3)

De (2) et (3) par addition $\therefore 5x = 10$ $\therefore x = 2$

Pa substitution dans (1) $\therefore 2 \times 2 - y = 3$ $\therefore y = 1$

$\therefore$ L'ensemble-solution du système des deux équations est = {(2, 1)}.

Pour t'entraîner :

1. Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :
   - A. $3x + 4y = 24$ et $x - 2y + 2 = 0$
   - B. $3x + 2y = 4$ et $x - 3y = 5$

2. Quel est le nombre de solutions de chacune des systèmes d'équations suivants :
   - A. $7x + 4y = 6$, $5x - 2y = 14$
   - B. $3x + 4y = -4$, $5x - 2y = 15$
   - C. $9x + 6y = 24$, $3x + 2y = 8$



Trouve la valeur de a et de b sachant que (3 , -1) est une solution du système des deux équations.

$a x + b y - 5 = 0$ et $3 a x + b y = 17$

Solution

$\because$ (3, -1) est une solution des deux équations

$\therefore$ (3, -1) est une solution de l'équation $a x + b y - 5 = 0$

$\therefore 3 a - b - 5 = 0$ **d'où** $3a - b = 5$ (1)

, (3, -1) est une solution de l'équations $3 a x + b y = 17$

$\therefore 9 a - b = 17$ (2)

En retranchant les deux membres de l'équation (1) des deux membres de l'équation (2), on obtient: $6 a = 12$ $\therefore a = 2$

En remplaçant a par 2 dans l'équation (1)

$3 \times 2 - b = 5$ $\therefore b = 1$



Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 11. Si on intervertit les deux chiffres, le nombre obtenu dépasse le nombre initial de 27. Quel est le nombre initial?

Solution

Soit x le chiffre des unités du nombre initial et y son chiffre des dizaines.

$\therefore x + y = 11$ .... (1)

	Chiffre des unités	Chiffre des dizaines	Valeur du nombre
Nombre initial	x	y	x + 10 y
Nombre obtenu en intervertissant les deux chiffres	y	x	y + 10 x

Le nombre obtenu en intervertissant les deux chiffres – le nombre initial = 27

$\therefore (y + 10 x) - (x + 10 y) = 27$ $\therefore y + 10 x - x - 10 y = 27$

$\therefore 9 x - 9 y = 27$ **En divisant les deux membres par 9** $\therefore x - y = 3$ .... (2)

En additionnant les deux équations (1) et (2)

$\therefore 2x = 14$ $\therefore x = 7$ En remplaçant x par 7 dans l'équation .... (1)

$\therefore 7 + y = 11$ $\therefore y = 4$ $\therefore$ Le nombre initial est 47



(1) Complète ce qui suit:

A L'ensemble-solution du système $x + y = 0$ et $y - 5 = 0$ est ....

B L'ensemble-solution du système $x + 3y = 4$ et $3y + x = 1$ est ....

C L'ensemble-solution du système $4x + y = 6$ et $8x + 2y = 12$ est ....

D Si les droites représentant les deux équations $x + 3y = 4$ et $x + ay = 7$ sont parallèles, alors $a =$ ....

E Si les deux équations $x + 2y = 1$ et $2x + ky = 2$, admettent une solution unique, alors la valeur de k ne peut pas être égale à ....

(2) Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Les droites d'équations: $3x + 5y = 0$ et $5x - 3y = 0$ se coupent au:
   A Point d'origine B Premier quadrant C Deuxième quadrant D Quatrième quadrant
2. L'ensemble-solution du système $x - 2y = 1$ et $3x + y = 10$ est:
   A $\{(5, 2)\}$ B $\{(2, 4)\}$ C $\{(1, 3)\}$ D $\{(3, 1)\}$
3. Si le système des deux équations $x + 4y = 7$ et $3x + ky = 21$ **admet une infinité de solution** alors $k =$ ....
   A 4 B 7 C 12 D 21

(3)

1. **Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants:**
   A $y = x + 4$, $x + y = 4$ B $x - y = 4$, $3x + 2y = 7$
   C $3x + 4y = 11$, $2x + y - 4 = 0$ D $3x - y + 4 = 0$, $y = 2x + 3$
   E $2x + y = 1$, $x + 2y = 5$ F $x + 2y = 8$, $3x + y = 9$
2. Si 16 équipes sportives ont participé à la coupe d'Afrique des nations et si le nombre d'équipes non arabes dépasse le triples du nombre d'équipes arabes de 4 , trouve le nombre d'équipes arabes participant à la coupe.
3. La différence entre les mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est 50. Trouve la mesure des deux angles.
4. Soit deux angles supplémentaires dont le double de la mesure du plus grand angle est égal à sept fois la mesure du plus petit angle. Trouve la mesure des deux angles.
5. Maintenant, la somme des âges d'Ahmed et d'Osama est 43 ans. Dans 5 ans, la différence entre leurs âges sera 3 ans. Trouve l'âge de chacun d'entre eux dans 7 ans.
6. La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 4 centimètres. Si le périmètre du rectangle est 28 centimètres, trouve l'aire du rectangle.

1 - 2

Résolution d'une équation du second degré à une inconnue graphiquement et algébriquement



Apprendre

- ☆ Comment résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue graphiquement et algébriquement

Expressions de base:

- ☆ Résolution graphique
- ☆ Résolution algébrique
- ☆ L'ensemble-solution

Réfléchis et discute

Nous avons déjà représenté graphiquement la fonction du second degré f telle que:

$f(x) = a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$

L'équation correspondante à cette fonction est $f(x) = 0$ ou

$ax^2 + b x + c = 0$

Nous avons déjà étudié comment résoudre cette équation par la factorisation.

Par exemple, pour résoudre l'équation: $x^2 - 4x + 3 = 0$

on factorise le membre de gauche de l'équation qui prend la forme:

(x - ....) (x .... 1) = 0

∴ x - .... = 0 ou (x- 1) = 0

∴ x = ... ou x = ...

∴ L'ensemble-solution est { .... , ... }

(1) Résolution graphique:

Pour résoudre l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ graphiquement, on suit les étapes suivantes:

- On trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = a x^2 + b x + c$ où $a \neq 0$
- On détermine l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe de la fonction avec l'axe des abscisses. Cet ensemble est l'ensemble-solution.

Exemple 1

Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4 x + 3$ dans l'intervalle [- 1, 5]

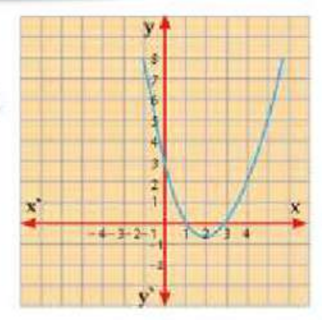
Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation $x^2 - 4 x + 3 = 0$

Solution

On détermine quelques couples (x, y) appartenant au graphe de f, ayant pour première composante $x \in [-1, 5]$

$f(-1) = 8, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 0,$

$f(2) = -1, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 3, \quad f(5) = 8$



On présente les couples obtenus dans un tableau comme suit:

x	5	4	3	2	1	0	-1
y = f(x)	8	3	0	-1	0	3	8

Dans un repère cartésien, on trace les points qui représentent ces couples puis on trace la courbe passant par ces points. Du graphique, on trouve que la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux deux points (3 , 0) et (1 , 0).
Les deux nombres 1 et 3 sont appelés les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
Donc, l'ensemble-solution est {1 , 3}

Pour t'entraîner :

1. Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dans l'intervalle [-4, 2] Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation: $x^2 + 2x + 1 = 0$

2. Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = -x^2 + 6x - 11$ dans l'intervalle [0, 6] Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation: $x^2 - 6x + 11 = 0$

(2) Résolution algébrique en utilisant la formule:

Réfléchis et discute

Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 7 = 0$ en t'inspirant de la méthode que tu utilises pour compléter un carré parfait.

Complète : $\because x^2 - 6x + 9 + 7 - 9 = 0$

$\therefore (x - \text{...........})^2 - 2 = 0 \qquad (x - \text{...........})^2 = 2$

$x - \text{...........} = \sqrt{2}$ ou $x \text{...........} = -\sqrt{2}$

$x = \text{...........} + \sqrt{2}$ ou $x = \text{........} - \sqrt{2}$

$\therefore x = \text{...........!}\ \sqrt{2}$

Nous pouvons résoudre l'équation du second degré : $a x^2 + b x + c = 0$ où $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $a \neq 0$ en utilisant la formule.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ où $a \neq 0$ et a , b et c sont des nombres réels

Exemples

2 Trouve l'ensemble-solution de l'équation $3x^2 = 5x - 1$ en approchant le résultat à deux décimales près.

Solution

$\because\ 3x^2 = 5x - 1 \qquad \therefore\ 3x^2 - 5x + 1 = 0$

$\therefore\ a = 3,\ b = -5,\ c = 1$

$$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm 3.61}{6}$$

Soit $x = \frac{5 + 3.61}{6} = 1.44$ ou $x = \frac{5 - 3.61}{6} = 0.23$

$\therefore$ L'ensemble-solution est: $\{1.44,\ 0.23\}$

3 Lors d'un concours du lancer du disque, le trajet pris par le disque d'un joueur suivait la relation: $y = -0.043\ x^2 + 4.9\ x + 13$ où x représente la distance parcourue horizontalement en mètres et y représente la hauteur en mètres atteinte par rapport au sol. Trouve à un centième près, la distance horizontale parcourue par le disque à partir du point du lancement pour atteindre le sol.



Solution

$\because\ a = -0.043,\ B = 4.9,\ c = 13$

$$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4.9) \pm \sqrt{(4.9)^2 - 4 \times (-0.043) \times 13}}{2 \times (-0.043)}$$

$$= \frac{(-4.9) \pm \sqrt{26.246}}{-0.086} = \frac{-4.9 \pm 5.123}{-0.086}$$

Soit $x = \frac{-4.9 + 5.123}{-0.086} = -2.59$ (refusée) Pourquoi ?

ou $x = \frac{-4.9 - 5.123}{-0.086} = 116.5465116$ mètres

$\therefore$ La distance parcourue horizontalement 116.55 mètres




Exercices 1-2

1. Trouve l'ensemble-solution de chacune des équations suivantes en utilisant la formule et en approchant le résultat à trois décimales près.

A $x^2 - 2x - 6 = 0$ B $x^2 + 3x - 3 = 0$ C $2x^2 - 4x + 1 = 0$

D $3x^2 - 6x + 1 = 0$ E $x(x - 1) = 4$ F $(x - 3)^2 - 5x = 0$

G $x + \frac{4}{x} = 6$ H $\frac{8}{x^2} + \frac{1}{x} = 1$ I $\frac{x}{3} = \frac{1}{5 - x}$

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans l'intervalle donné puis trouve l'ensemble-solution de l'équation f(x) = 0 en approchant le résultat à un dixième près.

A $f(x) = x^2 - 2x - 4$ dans l'intervalle [-2, 4]

B $f(x) = 2x^2 + 5x$ dans l'intervalle [-4, 2]

C $f(x) = 3x - x^2 + 2$ dans l'intervalle [-1, 4]

D $f(x) = x(x - 5) + 3$ dans l'intervalle [0, 5]

E $f(x) = 2x^2 - 3(2 - x)$ dans l'intervalle [-3, 2]

F $f(x) = 2x(x - 1) - 3(x + 2) + 5$ dans l'intervalle [-1, 3]

G $f(x) = (x - 3)^2 - (x - 3) - 4$ dans l'intervalle [7, 1]

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = 6x - x^2 - 9$ dans l'intervalle [0, 5] Du graphique, trouve:

A La valeur maximale ou la valeur minimale de la fonction

B L'ensemble-solution de l'équation $6x - x^2 - 9 = 0$

4. Un homme arrose son jardin à l'aide d'un tuyau qui évacue l'eau suivant un trajet déterminé par la relation: $y = -0.06x^2 + 1.2x + 0.8$ où x représente la distance en mètres atteinte horizontalement par l'eau et y représente la hauteur en mètres atteinte par rapport au sol. Trouve à un centimètre près, la plus grande distance horizontale atteinte par l'eau.

5. Du sol, un serpent voit un faucon à une hauteur de 160 mètres se dirigeant vers lui à une vitesse de 24 mètre/minute pour l'attraper. Le faucon se déplace verticalement vers le bas, suivant un trajet déterminé par la relation $d = Vt + 4.9t^2$. où d représente la distance en mètres, V représente la vitesse initiale en mètre/minute et t représente le temps en minutes. Calcule le temps qu'il faut au serpent pour pouvoir s'échapper avant que le faucon l'attrape.

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré

1 - 3



A apprendre

- ☆ Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré

Expressions de base

- ☆ Équation du premier degré
- ☆ Équation du second degré
- ☆ Ensemble-solution

Préliminaire :

On sait que $2x - y = 3$ est une équation du premier degré à deux inconnues tandis que les équations: $x^2 + y = 5$ et $xy = 2$ sont des équations du second degré à deux inconnues. Pourquoi ?

On va résoudre deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré. On utilise la méthode de la substitution dans la résolution comme le montrent les exemples suivants.

Calcul mental: Si $x + y = 10$ et $x^2 - y^2 = 40$ trouve $x - y$.



1 Résous algébriquement le système des deux équations:

$y + 2x + 1 = 0$ et $4x^2 + y^2 - 3xy = 1$

Solution

De l'équation: $y = -(2x + 1)$

Par substitution dans la deuxième équation.

$\therefore\ 4x^2 + [-(2x+1)]^2 - 3x[-(2x+1)] = 1$

$\therefore\ 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 6x^2 + 3x - 1 = 0$

$\therefore\ 14x^2 + 7x = 0$ $\qquad \therefore\ 7x(2x+1) = 0$

$\therefore\ x = 0$ ou $2x + 1 = 0$ $\qquad$ d'où $x = \frac{-1}{2}$

En substituant x dans la première équation:

Pour $x = 0$ $\qquad \therefore\ y = -(0+1) = -1$,

Pour $x = \frac{-1}{2}$ $\qquad \therefore\ y = -(2 \times \frac{-1}{2} + 1) = 0$

$\therefore$ L'ensemble-solution est: $\{(0, -1), (\frac{-1}{2}, 0)\}$

2 Le périmètre d'un rectangle est 14 cm et son aire est 12 cm². Trouve ses deux dimensions.

Solution

Soient x et y les dimensions du rectangle.

∵ Le périmètre d'un rectangle = **2 (longueur + largeur)**

∴ $14 = 2(x + y)$ ..... **En divisant les deux membres de l'équation par 2**

∴ $x + y = 7$ d'où = $y = 7 - x$ .... **(1)**

∵ L'aire d'un rectangle = **longueur × largeur** ∴ $x y = 12$ .... **(2)**

En substituant x de l'équation (1) dans l'équation (2)

∴ $x(7 - x) = 12$ $7x - x^2 = 12$

∴ $x^2 - 7x + 12 = 0$ $(x - 3)(x - 4) = 0$

∴ $x = 3$ ou $x = 4$ En substituant x dans l'équation **(1)**

Pour: $x = 3$ ∴ $y = 7 - 3 = 4$,

Pour: $x = 4$ ∴ $y = 7 - 4 = 3$ Les dimensions du rectangle sont 3 cm et 4 cm.

Exercices 1-3

(1) Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. L'ensemble-solution du système des deux équations $x - y = 0$ et $x y = 9$ est:
   A $\{(0, 0)\}$ B $\{(-3, -3)\}$ C $\{(3, 3)\}$ D $\{(-3, -3), (3, 3)\}$
2. L'une des solutions du systèmes des deux équations: $x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 20$ est :
   A $(-4, 2)$ B $(2, -4)$ C $(3, 1)$ D $(4, 2)$
3. Si la somme de deux nombres est égale à 7 et leur produit est égal à 12, alors les deux nombres sont:
   A 2, 5 B 2, 6 C 3, 4 D 1, 6

(2)

1. Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :
   A $y - x = 2$ et $x^2 + x y - 4 = 0$
   B $x + 2y = 4$ et $x^2 + x y + y^2 = 7$
   C $x - 2y - 1 = 0$ et $x^2 - x y = 0$
   D $y + 2x = 7$, $2x^2 + x + 3y = 19$
   E $x - y = 10$ et $x^2 - 4xy + y^2 = 52$
   F $x + y = 2$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ où $(x, y \neq 0)$
2. Un nombre est formé de deux chiffres. Son chiffre des unités est le double de son chiffre des dizaines. Si le produit de ses deux chiffres est égal au demi du nombre initial, trouve ce nombre?
3. La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 3 cm. Si l'aire du rectangle est égale à 28 cm^2, trouve son périmètre.
4. La longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est 13 cm et son périmètre est égal à 30 cm. Trouve les longueurs des côtés de l'angle droit .
5. La différence entre les longueurs des diagonales d'un losange est 4 cm et son périmètre égal à 40 cm. Trouve les longueurs de ses diagonales.
6. Un point est situé sur la droite d'équation $5x - 2y = 1$ Son ordonnée est le double du carré de son abscisse. Trouve les coordonnées de ce point.





1 Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues:

Nous pouvons vérifier la qualité de la solution du système des deux équations : $X + 2y = 8$ et $3X + y = 9$ (par exemple), en utilisant une calculatrice scientifique. Dans ce cas, on suit les étapes suivantes



On appuie sur la touche (MODE) puis on choisit (EQN) de la liste en introduisant le nombre qui lui correspond ou en appuyant sur la touche (EXE) Dans certains cas, on choisit l'équation affine: ($an\,X + bn\,Y = cn$) On introduit les coefficients ((Y),(X)),et le terme constant ((cn)) de la première équation puis ceux de la deuxième équation en tenant en compte que l'appui sur la touche ((=)) donne la valeur de ((Y),(X)), ce qui représente la solution de l'équation.

2 Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue:

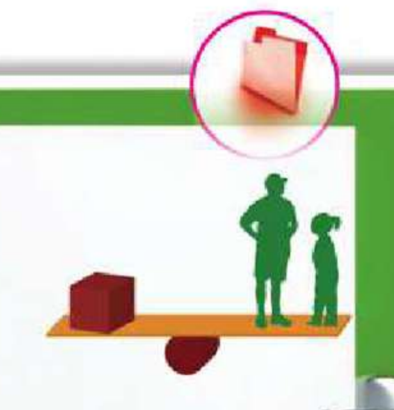
On répète les étapes précédentes citées dans les trois premières lignes puis on choisit la touche ($ax^2 + bx + c = 0$) On introduit les coefficients (a) , (b) et (c) puis on appuie sur la touche de l'introduction ((=)) ou la touche (EXE) suite à l'introduction de chaque nombre. En continuant l'appui sur la touche de l'introduction, la calculatrice affiche directement les deux valeurs de x





Portfolio

1. *La figure ci-contre représente:* une balançoire à bascule. Sur l'une de ses extrémités, un homme et sa fille sont debout. Le poids de l'homme est 80 kilogrammes. Sur l'autre extrémité, on a placé une pierre de poids égal au poids de la fille. Si la balançoire est en équilibre, trouve le poids de la fille?



2. *La figure ci-dessus montre:* des relations entre les poids de pommes et de bananes. Sachant que les différents fruits d'une même sorte ont le même poids, trouve la lecture de la balançoire (c) puis détermine la position du l'indicateur sur le dessin.

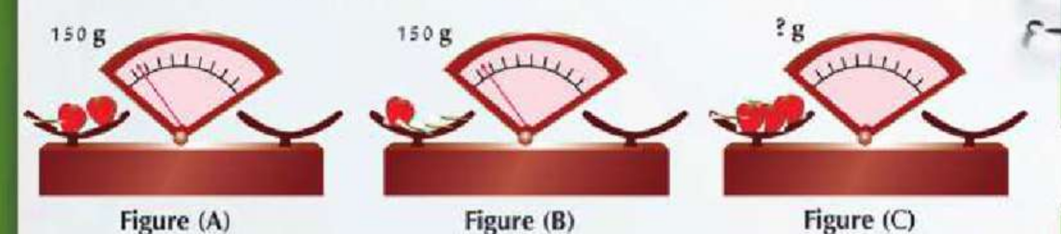


Figure (A) Figure (B) Figure (C)





Epreuve de l'unité



1 Complète ce qui suit:

A Si (5, x - 7) = (y + 1, - 5) alors x + y = ...

B La fonction f telle que $f(X) = X^6 + 2X^4 - 3$ est une fonction polynôme du degré ....

C Si la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + a$ passe par le point (1 , 0) , alors a = ...

2 Trouve l'ensemble-solution des équations suivantes:

A $x + 3y = 7$, $5x - y = 3$ algébriquement et graphiquement

B $x^2 - 4x + 1 = 0$ en utilisant la formule et en approchant le résultat à deux chiffres décimales.

C $y - x = 3$, $x^2 + y^2 - xy = 13$

3 Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(X) = x^2 - 2x - 1$ dans l'intervalle [- 2 , 4] . Du graphique, trouve :

A L'équation de l'axe de symétrie de la courbe

B L'ensemble-solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$

4 La somme de deux nombres est égale à 90 et leur produit est égale à 2000. Trouve les deux nombres.

5 Un cycliste s'est déplacé d'une ville A dans la direction Est vers une ville B puis il s'est déplacé de la ville B dans la direction Nord vers la ville C. Il a fait 14 km en tout. Si la somme des carrés des deux distances parcourues est 100 km², trouve la plus petite distance entre les deux villes A et C.

6 Quand un dauphin saute hors de l'eau son trajet suit la relation: $y = -0 2 X^2 + 2x$ où y représente la hauteur atteinte par le dauphin de la surface de l'eau et x représente la distance horizontale en pieds. Trouve la distance horizontale que le dauphin parcoure quand il saute hors de l'eau.



Unité (2):
Fonctions rationnelles et opérations
Ensembles des zéros d'une fonction polynôme



A apprendre:

- ☆ Comment trouver l'ensemble des zéros d'une fonction polynôme

Expressions de base :

- ☆ fonction polynôme
- ☆ ensemble des zéros d'une fonction

Réfléchis et discute :

Si f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ est une fonction polynôme de troisième degré en x, trouve f(0) , f(1) et f(2). **Que remarques-tu ?**

On remarque que : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$

Pour cela, on appelle les nombres 0 , 1 et 2 les zéros de la fonction f.

D'une manière générale

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynôme en x, alors l'ensemble des valeurs de x qui rendent $f(x) = 0$ est appelé l'ensemble des zéros de la fonction f. Cet ensemble est noté Z(f).

Donc, Z(f) est l'ensemble-solution de l'équation $f(x) = 0$

D'une manière générale, pour déterminer les zéros d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = 0$ pour trouver l'ensemble des valeurs de x.



Trouve Z(f) pour chacune des fonctions polynômes suivantes :

1. $f_1(x) = 2x - 4$
2. $f_2(x) = x^2 - 9$
3. $f_3(x) = 5$
4. $f_4(x) = 0$
5. $f_5(x) = x^2 + 4$
6. $f_6(x) = x^6 - 32x$
7. $f_7(x) = x^2 + x + 1$

Solution

1. $f_1(x) = 2x - 4$ On pose $f_1(x) =$ zero $\therefore 2x - 4 = 0$

   D'où $2x = 4$ $\therefore x = 2$ $\therefore z(f_1) = \{2\}$.

2 $f_2(x) = x^2 - 9$

On pose $f_2(x) = zero$ $\therefore x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ $\therefore x = \pm 3$ $\therefore z(f_2) = \{-3 , 3\}$.

3 $f_3(x) = 5$

$\therefore$ Il n'y a aucun nombre réel qui rend $f_3(x) = 0$ $\therefore z(f_3)$ est ϕ

4 $f_4(x) = 0$

$\therefore$ Tous les nombres réels $\mathbb{R}$ sont des zéros de la fonction $\therefore z(f_4) = \mathbb{R}$

5 On pose $x^2 + 4 = 0$

$\therefore x^2 = -4$ $\therefore x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ $\therefore z(f_5)$ est ϕ

6 On pose $x^6 - 32x = 0$

$\therefore x(x^5 - 32) = 0$ $\therefore x = 0$, $x^5 = 32$

$x^5 = 2^5$ $\therefore x = 2$ $\therefore z(f_6) = \{0 , 2\}$

7 On pose $x^2 + x + 1 = 0$

Dans la mesure où la factorisation de l'expression $x2 + x + 1$ est difficile, on utilise la formule pour résoudre l'équation du second degré.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{où} \quad a= 1 , b = 1 , c = 1$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$\therefore$ Il n'y a pas de solutions réelles des l'équation d'où $z(f_7) = \phi$

Pour t'entraîner :

1 **Trouve l'ensemble des zéros de chacune des fonctions polynômes suivantes :**

a $f(x) = x^3 - 4x^2$ b $f(x) = x^2 - 2x + 1$ c $f(x) = x^2 - 2x - 1$

d $f(x) = x^4 - x^2$ e $f(x) = x^2 - x + 1$ f $f(x) = x^2 - 2$




Exercices 2-1

[1] **Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :**

1. L'ensemble des zéros de la fonction f telle que $f(x) = -3x$ est :

   a {0} b {-3} c {-3 , 0} d R

2. L'ensemble des zéros de la fonction f telle que $f(x) = x(x2 - 2x + 1)$ est :

   a {0 , 1} b {0 , -1} c {-1 , 0} d {1}

3. Si Z(f) = { 2 } et $f(x) = x^3 - m$, alors m est égale à :

   a $\sqrt[3]{2}$ b 2 c 4 d 8

4. Si Z(f) = { 5 } et $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$, alors a est égale à :

   a -50 b -5 c 5 d 50

5. Si Z(f) = { 1 , -2 } et $f(x) = x^2 + x + a$, alors a est égale à :

   a 28 b 1 c - 1 d - 2

[2] 1 **Trouve l'ensemble des zéros de chacune des fonctions polynômes suivantes, définies sur ℝ.**

a $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ b $f(x) = x^2 - 2x$

c $f(x) = x^2 - 16$ d $f(x) = 25 - 9x^2$

e $f(x) = 2x^3 - 18x$ f $f(x) = 5x^3 - 20x$

g $f(x) = x^3 - 125$ h $f(x) = 2x^3 + 16$

i $f(x) = 2x^4 + 54x$ j $f(x) = 6x^2 + x - 12$

k $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$ l $f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2$

m $f(x) = x(x - 5) - 14$ n $f(x) = (x - 2)(x + 3) + 4$

o $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$ p $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

2 Si $f(x) = x^3 - 2x^2 - 75$, **démontre que** le nombre 5 est l'un des zéros de la fonction.

3 Si {-3 , 3} est l'ensemble des zéros de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + a$ ***trouve*** **la valeur de** a.

4 Si l'ensemble des zéros de la fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + 15$ est { 3 , 5 } ***trouve*** **la valeur de a et b.**

2 - 2

Fonction rationnelle





A apprendre

☆ La notion d'une fonction rationnelle

Expressions de base

☆ Une fonction polynôme.
☆ L'ensemble de définition d'une fraction rationnelle
☆ L'ensemble de définition commun à deux fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

On a étudié qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a , b ∈ ℝ , b ≠ 0

Si f: ℝ ⟶ ℝ telle que f(x) = x + 3

g : ℝ ⟶ ℝ telle que g(x) = x^2 - 4.

1. *Trouve* l'ensemble de définition de f et g.
2. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **peux-tu trouver l'ensemble de définition de h en connaissant les ensembles des definition de f et g ?**

De ce qui précède, on déduit que :

h est appelée fonction rationnelle où $h(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4}$

Dans ce cas, l'ensemble de définition de h est ℝ privé des valeurs de x qui rendent la fraction rationnelle indéfinie (c'est l'ensemble des zéros du dénominateur).

Donc: l'ensemble de définition de h est R - {-2 , 2}

Si f et g sont deux fonctions polynômes et si Z(g) est l'ensemble des zéros de g, alors la fonction h telle que
h : ℝ - z (g) ⟶ ℝ , $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **est appelée une fonction rationnelle réelle ou plus simplement une fonction rationnelle.**

On remarque que : l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle = ℝ – l'ensemble des zéros du dénominateur.

Pour t'entraîner :

1 **Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions rationnelles suivantes puis** ***calcule*** **g (0), g (2), g (-2):**

a $g(x) = \frac{x+3}{4}$ **b** $g(x) = \frac{x-2}{2x}$ **c** $g(x) = \frac{1}{x+2}$

d $g(x) = \frac{x^2+9}{x^2-16}$ **e** $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}$ **f** $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

2 **Si l'ensemble de définition de la fonction g :** $g(x) = \frac{x-1}{x^2-ax+9}$ est ℝ - {3} ***trouve*** la valeur de a.

L'ensemble *de définition commun de deux ou plusieurs fractions rationnelles :*

L'ensemble de définition commun de deux ou plusieurs fractions rationnelles est l'ensemble des nombres réels qui rendent les fractions définies simultanément.



Exemple

Si g_1 et g_2 sont deux fractions rationnelles telles que :

$g_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $g_2(x) = \frac{3}{x^2-4}$ ***trouve*** l'ensemble de définition commun de g_1 , g_2

Solution

Soient D_1 l'ensemble de définition de g_1 et D_2 l'ensemble de définition de g.

∴ D_1 = ℝ - {1} , D_2 = ℝ - {-2 , 2} et l'ensemble de définition commun aux deux fractions g_1, $g_2 = D_1 \cap D_2$

où $D_1 \cap D_2$ = {(ℝ - {1}} ∩ {ℝ - {-2 , 2}} = ℝ - {-2 , 1 , 2}

Pour toute valeur de la variable x appartenant a'l'ensemble de définition commun, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont définies (existent).

Si g_1 et g_2 sont deux fractions rationnelles et si :
L'ensemble de définition de g_1 = ℝ – Z_1 (où Z_1 l'ensemble des zéros de g_1)
l'ensemble de définition de g_2 = ℝ – Z_2 (où Z_2 l'ensemble des zéros de g_2)
alors, l'ensemble de définition commun aux deux fractions rationnelles $g_1(x)$ et $g_2(x)$ = ℝ – (Z_1 , ∪ Z_2)
= ℝ – l'ensemble des zéros des dénominateurs des deux fractions
Généralement, l'ensemble de définition commun de plusieurs fractions rationnelles
= ℝ – l'ensemble des zéros des dénominateurs de ces fractions



Trouve l'ensemble de définition commun dans chacun des cas suivants :

1. $n_1(x) = \frac{1}{x}$, $n_2(x) = \frac{2}{x+1}$
2. $n_1(x) = \frac{3}{x^2 - x}$, $n_2(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$
3. $n_1(x) = \frac{3}{x-2}$, $n_2(x) \frac{5}{x+2}$, $n_3(x) = \frac{x}{x^3 - 4x}$
4. $n_1(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, $n_2(x) = \frac{3x}{x^2-x}$, $n_3(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2+x-2}$



Exercices 2-2

Trouve **l'ensemble de définition commun de chaque groupe de fractions rationnelles :**

1. $\frac{x}{3}$, $\frac{3}{x}$
2. $\frac{1}{2x}$, $\frac{x-1}{5}$
3. $\frac{x+2}{x+5}$, $\frac{x-4}{x-7}$
4. $\frac{4}{x-4}$, $\frac{x-5}{5x}$
5. $\frac{x}{x^2-4}$, $\frac{3}{2-x}$
6. $\frac{5}{x-2}$, $\frac{x+1}{x^2-2x}$
7. $\frac{1}{x^3-1}$, $\frac{x}{1-x^2}$
8. $\frac{x^2+4}{x^2-4}$, $\frac{7}{x^2+4x+4}$
9. $\frac{x-2}{x+4}$, $\frac{7}{x-3}$, $\frac{x}{x^2+4}$
10. $\frac{x+3}{2}$, $\frac{3}{x^2-9}$, $\frac{3x}{x^2-3x}$
11. $\frac{x^2}{x-3}$, $\frac{7}{x+3}$, $\frac{-2x}{x^3+27}$
12. $\frac{4x-3}{x^2-x}$, $\frac{x-1}{x^2+16}$, $\frac{5x}{x^2-2x-3}$
13. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, $\frac{7}{x^2-9}$, $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-2}$



Egalité de deux fractions rationnelles



Apprendre

- La notion d'égalité de deux fractions rationnelles.
- Conditions d'égalité de deux fractions rationnelles.

Expressions de base

- Simplification des fractions rationnelles.
- Égalité de deux fractions rationnelles.

Simplification des fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

Soit g une fraction rationnelle telle que : $g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

Complète ce qui suit :

1. l'ensemble de définition de g = ...
2. Le facteur commun entre le numérateur et le dénominateur après avoir factorisé complètement chacun d'eux est ....≠zèro Ce facteur commun est différent de zéro car x ne peut pas être égale à ....
3. La fraction rationnelle dans la forme la plus simple après avoir éliminé le facteur commun = ...
4. Est-ce que l'ensemble de définition de la fraction change après l'avoir simplifié?

De ce qui précède, on déduit que:

Mettre une fraction rationnelle sous la forme la plus simple est appelé simplification de la fraction rationnelle.
Pour simplifier une fraction rationnelle, on suit les étapes suivantes:

1. ***On factorise complètement le numérateur et le dénominateur de la fraction.***
2. ***On détermine l'ensemble de définition de la fraction rationnelle avant d'éliminer les facteurs communs du numérateur et du dénominateur.***
3. ***On élimine les facteurs communs du numérateur et du dénominateur pour obtenir la fraction sous la forme la plus simple.***

Définition: On dit qu'une fraction rationnelle est sous la forme la plus simple s'il n' y a aucun facteur commun entre le numérateur et le dénominateur de la fraction.



Si $g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ mets g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g.

Solution

$\because\ g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^4 - 13x^2 + 36} = \frac{x(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)} = \frac{x(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$

$\therefore$ L'ensemble de définition de g(x) = $\mathbb{Z}$ - {-3 , -2 , 2 , 3}.

$\therefore$ Pour simplifier la fraction, on élimine (x + 3) , (x - 2) du numérateur et du dénominateur.

$\therefore\ g(x) = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$

Egalité de deux fractions rationnelles:

Réfléchis et discute :

Mets **sous la forme la plus simple les deux fractions rationnelles $g_1(x)$ et $g_2(x)$ en déterminant l'ensemble de définition de chaque fraction dans chacun des cas suivants:**

1. $g_1(x) = \frac{x+3}{x^2 - 9}$ et $g_2(x) = \frac{2}{2x - 6}$
2. $g_1(x) = \frac{2x}{2x + 4}$ et $g_2(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$

Est-ce que $g_1 = g_2$ dans chaque cas? Explique ta réponse.

De ce qui précède, on remarque que:

1. $g_1(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$ **et l'ensemble de définition de** $g_1 = \mathbb{R}$ - {-3 , 3}

   $g_2(x) = \frac{2}{2(x-3)} = \frac{1}{x-3}$ **et l'ensemble de définition de** $g_2 = \mathbb{R}$ - {-3}

   Donc : g_1 et g_2 ont la même forme la plus simple mais l'ensemble de définition de $g_1 \neq$ l'ensemble de définition de g_2

2. $g_1(x) = \frac{2x}{2(x+2)} = \frac{x}{x+2}$ **et l'ensemble de définition de** $g_1 = \mathbb{R}$ - {-2}

   $g_2(x) = \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x}{x+2}$ **et l'ensemble de définition de** $g_2 = \mathbb{R}$ - {-2}

Donc g_1 et g_2 ont la même forme la plus simple et le domaine de définition de , **l'ensemble de définition de** g_1 = **l'ensemble de définition de** g_2

De ce qui précède, on déduit que :

> *On dit que deux fonctions g_1 et g_2 sont égales (c'est-à-dire $g_1 = g_2$) si les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois:*
> *l'ensemble de définition de g_1 = l'ensemble de définition de g_2*
> *$g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant à leurensemble de définition commun.*

Exemples

2 **Si** $g_1(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - x^2}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x}$ **démontre que :** $g_1 = g_2$

Solution

$\because\ g_1(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - x^2} = \dfrac{x^2}{x^2(x-1)}$ $\therefore\ g_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$

et l'ensemble de définition $g_1 = \mathbf{R} - \{0 , 1\}$ 

$\because\ g_2(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x} = \dfrac{x(x^2 + x + 1)}{x(x^3 - 1)} = \dfrac{x(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)}$

$\therefore\ g_2(x) = \dfrac{1}{x-1}$

et l'ensemble de définition $n_2 = \mathbf{R} - \{0 , 1\}$ 

De (1) et (2)

$\because$ L'ensemble de définition de g_1 = l'ensemble de définition de g_2 , $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} - \{0 , 1\}$

$\therefore\ g_1 = g_2$



3 **Si** $g_1(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$, $g_2(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x^3 - 9x}$

Démontre que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant à leur ensemble de définition commun puis trouve cet ensemble.

Solution

$\because\ g_1(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x+3}$

et l'ensemble de définition de $g_1 = \mathbb{Z} - \{-3 , 2\}$ 

$\because\ n_2(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x^3 - 9x} = \dfrac{x(x-3)(x+2)}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{x+2}{x+3}$

et l'ensemble de définition de $g_2 = \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$ 

De (1) et (2)

On remarque que : $g_1(x)$, $g_2(x)$ ont la même forme la plus simple $\dfrac{x+2}{x+3}$.

mais l'ensemble de définition de $g_1 \neq$ l'ensemble de définition de g_2.

Nous pouvons dire que : $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant al'ensemble de définition commun des deux fonctions g_1, g_2 qui est $\mathbb{R} - \{-3, 0, 2, 3\}$.



Complète ce qui suit :

1. La forme la plus simple de la fraction g telle que $g(x) = \dfrac{4x^2 - 2x}{2x}$ où $x \neq 0$ est ....
2. L'ensemble de définition commun aux deux fonctions g_1, g_2 où $g_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$, $g_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est ....
3. Si $g_1(x) = \dfrac{1+a}{x-2}$, $g_2(x) = \dfrac{4}{x-2}$ et $g_1(x) = g_2(x)$ alors $a =$ ....
4. Si la forme la plus simple de la fraction $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - a}$ est $g(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ alors $a =$ ....
5. Si $g_1(x) = \dfrac{-7}{x+2}$, $g_2(x) = \dfrac{x}{x-k}$ si l'ensemble de définition commun aux deux fonctions g_1, g_2 est $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$ alors $k =$ ....



1. **Mets chacune des fractions rationnelles suivantes sous la forme la plus simple en déterminant son ensemble de définition :**

A $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ B $\dfrac{x+1}{x^2 + 3x + 2}$ C $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

D $\dfrac{x^3 - 1}{(x-1)(x+5)}$ E $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x^3 - 18x}$ F $\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x}$

G $\dfrac{2x^2 + 7x + 6}{4x^2 + 4x - 3}$ H $\dfrac{(x - 2)^2 - 1}{x(x - 3)}$ I $\dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$

2 **Dans chacun des cas suivants, dire si $g_1 = g_2$ ou non en justifiant la réponse**

A $g_1(x) = \dfrac{x - 1}{x}$ et $g_2(x) = \dfrac{(x - 1)(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)}$

B $g_1(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

C $g_1(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x - 1)(x^2 + 3)}$ et $g_2(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

D $g_1(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x}$

3 **Dans chacun des cas suivants, démontre que : $g_1 = g_2$**

A $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^3 + 4x}$

B $g_1(x) = \dfrac{2x}{2x + 8}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 8x + 16}$

C $g_1(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x}$ et $g_2(x) = \dfrac{(x - 1)(x^2 + 1)}{x^3 + x}$

d $g_1(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$ et $g_2(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

4 **Dans chacun des cas suivants, trouve l'ensemble de définition commun des deux fonctions g_1 , g_2 :**

A $g_1(x) = \dfrac{x + 2}{3}$ et $g_2(x) = \dfrac{x - 3}{x}$

B $g_1(x) = \dfrac{-5}{x^2 - 1}$ et $g_2(x) = \dfrac{2}{x}$

C $g_1(x) = \dfrac{x - 5}{3 - x}$ et $g_2(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

D $g_1(x) = \dfrac{x}{x^3 - 8}$ et $g_2(x) = \dfrac{11}{x^2 - 4}$

E $g_1(x) = \dfrac{3x + 1}{7x}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 81}$

F $g_1(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 16}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 4x}$



Opérations sur les fractions rationnelles



A apprendre

- Comment effectuer les opérations (+ , - , ×, ÷) sur les fractions rationnelles

Expressions de base

- Opposé d'une fraction rationnelle.
- Inverse d'une fraction rationnelle.

(1) Addition et soustraction des fractions rationnelles :

Réfléchis et discute :

1 Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont deux nombres rationnels, trouve la valeur de:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$

2 Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux nombres rationnels, trouve la valeur de:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

De ce qui précède, on peut additionner ou soustraire deux fractions rationnelles ayant le même dénominateur ou deux dénominateurs différents comme suit:

Si $x \in$ *a l'ensemble de définition commun des deux fonctions* g_1, g_2 *tel que:*

1 $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \frac{f_3(x)}{f_2(x)}$

(deux fractions ayant le même dénominateur)

Donc: $g_1(x) + g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x)+f_3(x)}{f_2(x)}$,

$g_1(x) - g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{-f_3(x)}{f_2(x)}$

2 $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \frac{f_3(x)}{f_4(x)}$

(deux fractions ayant des dénominateurs différents)

Donc: $g_1(x) + g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{f_3(x)}{f_4(x)}$

$= \frac{f_1(x) \times f_4(x) + f_3(x) \times f_2(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$,

$g_1(x) - g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{f_1(x) \times f_4(x) - f_3(x) \times f_2(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$



1 **Si** $g_1(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$ **et** $g_2(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$

Trove **$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ en déterminant l'ensemble de définition de g.**

Solution

$\because\ g(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$\therefore\ g(x) = \frac{x}{x^2 + 2x} + \frac{x+2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x(x+2)} + \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$

Le domaine de définition de $g = \mathbb{R} - \{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}$

$\therefore\ g(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)}$

2 ***Mets:*** **g(x) dans la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g où :**

$g(x) = \frac{3x-4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2x+6}{x^2 + x - 6}$

Solution

$\because\ g(x) = \frac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \frac{2(x+3)}{(x-2)(x+3)}$

L'ensemble de définition de $g = \mathbb{R} - \{-3\ ,\ 2\ ,\ 3\}$

$\therefore\ g(x) = \frac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \frac{2}{x-2}$

$\because$ Le PPCM des dénominateurs = (x - 3)(x - 2) on multiplie les deux membres de la deuxième fraction par (x - 3)

$\therefore\ g(x) = \frac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \frac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3x-4+2x-6}{(x-2)(x-3)}$

$= \frac{5x-10}{(x-2)(x-3)} = \frac{5(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{5}{x-3}$

3 *Mets* **g(x) dans la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g où:**

$g(x) = \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{2x - 4x^2}$, puis trouve g(0) et g(-1) si cela est possible.

Solution

$\because\ g(x) = \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{-4x^2 + 2x}$

$= \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{-(4x^2 - 2x)}$ *(ranger dans l'ordre décroissant selon les puissances de x)*

$= \frac{12}{3(4x^2 - 1)} - \frac{2}{2x(2x - 1)} = \frac{4}{(2x + 1)(2x - 1)} - \frac{1}{x(2x - 1)}$ *(Factorisation)*

L'ensemble de définition de $g = \mathbb{R} - \{\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

Le PPCM des dénominateurs = $x(2x + 1)(2x - 1)$

$\therefore\ g(x) = \frac{4x}{x(2x + 1)(2x - 1)} - \frac{2x + 1}{x(2x + 1)(2x - 1)}$

$\therefore\ g(x) = \frac{4x - (2x + 1)}{x(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{4x - 2x - 1}{x(2x + 1)(2x - 1)}$

$= \frac{2x - 1}{x(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{1}{x(2x + 1)}$

g(0) n'existe pas car le zéro n'appartient pas a'l'ensemble de définiton de

$g(-1) = \frac{1}{-1 \times (-2 + 1)} = \frac{1}{-1 \times -1} = 1$

Pour t'entraîner :

Mets **g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g dans chacun de cas suivants:**

1 $g(x) = \frac{x - 2}{x} + \frac{3 + x}{2x}$

2 $g(x) = \frac{2x}{x + 2} + \frac{4}{x + 2}$

3 $g(x) = \frac{2}{x + 3} + \frac{x + 3}{x^2 + 3x}$

4 $g(x) = \frac{x}{x - 4} - \frac{x + 4}{x^2 - 16}$

5 $g(x) = \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x - 1}$

6 $g(x) = \frac{5}{x - 3} + \frac{4}{3 - x}$

7 $g(x) = \frac{x^2}{x - 1} + \frac{x}{1 - x}$

8 $g(x) = \frac{x}{x - 2} - \frac{x}{x + 2}$

9 $g(x) = \frac{x + 3}{2x} - \frac{x}{2x - 1}$

10 $g(x) = \frac{3}{x + 1} + \frac{2x + 1}{1 - x^2}$

(2) Multiplication et division des fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

Pour toute fraction rationnelle g (x) ≠ 0, il existe un inverse. Cet inverse est noté $\frac{1}{n(x)}$.

Si $g(x) = \frac{x+2}{x+5}$, alors $\frac{1}{g(x)} = \frac{x+5}{x+2}$

L'ensemble de définition de g = $\mathbb{R}$ - {-5}, et l'ensemble de définition de $\frac{1}{g}$ = $\mathbb{R}$-{-2, -5} on a

$g(x) \times \frac{1}{g(x)} = 1$

De ce qui précède, nous pouvons effectuer la multiplication et la division de deux fractions comme suit:

Si g_1 et g_2 sont deux fonctions telles que:

$g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \frac{f_3(x)}{f_4(x)}$ *alors :*

1. $g_1(x) \times g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{f_1(x) \times f_3(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$

   où x appartient a'l'ensemble de définition commun des deux fractions rationnelles g_1 , g_2 qui est $\mathbb{R}$ - (Z (f_2) ∪ Z (f_4))

2. $g_1(x) : g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \div \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \frac{f_4(x)}{f_3(x)}$

   ou $g_1 : g_2$ appartient a'l'ensemble de définition commun des deux fractions rationnelles g_1 , g_2 , g_2^{-1} qui est $\mathbb{R}$ - (Z(f_2) ∪ Z(f_3) ∪ Z(f_4))

Exemples

4) Si $g(x) = \frac{x+1}{x^2 - x - 2} \times \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 + 16x + 5}$

trouve g(x) sous la forme la plus simple en déterminant son ensemble de définition puis trouve g(0) et g(-1) si cela est possible

Solution

$g(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)} \times \frac{(x+5)(x-2)}{(3x+1)(x+5)}$

$= \frac{(x+1)(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+1)(3x+1)(x+5)} = \frac{1}{3x+1}$ *(la forme la plus simple)*

Le domaine de définition de g = $\mathbb{R}$ - {-5 , -1 , $-\frac{1}{3}$, 2} et g(0) = 1,

g(-1) n'existe pas car -1 n'appartient pas a' l'ensemble de définition de g .

5 **Si** $g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x} : \frac{3x^2 + 6x - 45}{4x^2 - 9}$

trouve **g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g**

Solution

$\because g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x} : \frac{3(x^2 + 2x - 15)}{4x^2 - 9}$ $\therefore g(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x(2x+3)} : \frac{3(x+5)(x-3)}{(2x+3)(2x-3)}$

L'ensemble de définition de g = $\mathbb{R}$ - {0 , $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, -5 , 3}

$\therefore g(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x(2x+3)} \times \frac{(2x+3)(2x-3)}{3(x+5)(x-3)}$

$= \frac{(x+3)(x-3)(2x+3)(2x-3)}{3x(2x+3)(x+5)(x-3)} = \frac{(x+3)(2x-3)}{3x(x+5)}$

Pour t'entraîner :

(3) Mets g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g dans chacun de cas suivants:

1 $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} \times \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$ **2** $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} \times \frac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

3 $g(x) = \frac{3x - 15}{x + 3} : \frac{5x - 25}{4x + 12}$ **4** $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} : \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Exercices 2-4

Mets g(x) dans chacun de cas suivants sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g:

1 $g(x) = \frac{x - 6}{2x^2 - 15x + 18} + \frac{x - 5}{15 - 13x + 2x^2}$ **2** $g(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4x + 4} + \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10}$

3 $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8} - \frac{9 - x^2}{x^2 + x - 6}$ **4** $g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x - 3}{3 - x}$

5 $g(x) = \frac{x - 5}{2x^2 - 13x + 15} + \frac{x + 3}{15x - 18 - 2x^2}$ **6** $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - x - 6} : \frac{2x^2 - 3x}{4x^2 - 9}$

7 $g(x) = \frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 6x} \times \frac{4x + 24}{36 - x^2}$ **8** $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1} : \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$

9 $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} : \frac{2x - 10}{x^2 - 6x + 9}$ **10** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} : \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$

Portfolio



Si $g_1(x) = x + \frac{1}{x-2}$ et $g_2(x) = 4x + \frac{4}{x-2}$

et si $g(x) = g_1(x) \div g_2(x)$:

1. Trouve ensemble de définition de g (x)
2. g (x) sous la forme la plus simple.
3. g (1), g (5) si cela est possible.

Epreuve de l'unité



[1] Complète ce qui suit :

1. La forme la plus simple de la fonction g telle que $g(x) = \frac{3x}{x+1} \div \frac{x}{x+1}$ est .... et son ensemble de définition est ....
2. Si la fraction rationnelle $\frac{x-a}{x-3}$ admet pour inverse la fraction $\frac{x-3}{x+2}$, alors a = ...
3. Si $g_1(x) = \frac{x+1}{x-2}$, et $g_2(x) = \frac{x^2+x}{x^2-2x}$ alors L'ensemble de définition dans lequel les deux fractions g_1 et g_2 sont égales à ....

[2]

1. Trouve l'ensemble de définition commun dans lequel les deux fractions $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont égales :

   $g_1(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}$, $g_2(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+1}$

2. Si $g(x) = \frac{x^2-49}{x^3-8} : \frac{x+7}{x-2}$,trouve g(x) dans la forme la plus simple en déterminant son ensemble de définition puis trouve la valeur de g(1).
3. Si $g_1(x) = \frac{x^2}{x^3-x^2}$ et $g_2(x) = \frac{x^3+x^2+x}{x^4-x}$ démontre que $g_1 = g_2$
4. Si l'ensemble de définition de la fonction $g(x) = \frac{b}{x} + \frac{9}{x+a}$ est R- {0, 4}, et si g(5) = 2 trouve la valeur de a et b
5. Mets la fonction sous la forme la plus simple en déterminant son ensemble de définition si:

   a) $g(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} + \frac{x-5}{x^2-6x+5}$ **b)** $g(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} \times \frac{2x-2}{x^2+x+1}$

6. **Si** $g(x) = \frac{x^2-2x}{(x-2)(x^2+2)}$

   a) Trouve $\frac{1}{g(x)}(x)$ et détermine son ensemble **b)** Si $\frac{1}{g(x)} = 3$ trouve la valeur de x



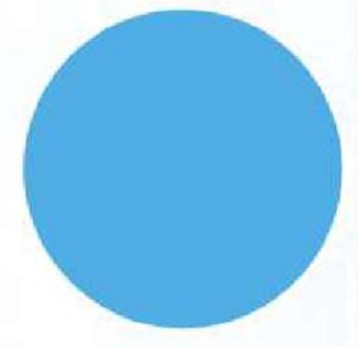
Unité 3: Probabilité











3 - 1

Opérations sur les événements



A apprendre:

- Effectuer des opérations sur les événements (intersection – union).

Expressions de base:

- intersection
- union
- deux événements incompatibles.
- corde
- diamètre d'un cercle
- Diagramme de Venn

Réfléchis et discute



Si on jette au hasard un dé non pipé une seule fois et on observe le nombre apparent sur la face supérieure du dé, alors :

1. L'espace des éventualités = {...., ..., ..., ..., ..., ...}.
2. L'événement « obtenir le nombre 7 » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = ...
3. L'événement « obtenir le nombre inférieur à 9 » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = ...
4. L'événement « obtenir le nombre premier » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = $\frac{\dots}{\dots}$

Si A est un événement d'un espace des éventualités E ($A \subset E$), alors

$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$

où card(A): représente le nombre d'éléments de A, card(E) représente le nombre d'éléments de l'espace des éventualités E et P(A) représente la probabilité d'obtenir l'événement A.

On remarque qu'on : peut écrire la probabilité sous la forme d'une fraction ou d'un pourcentage comme suit :

Evénement impossible	Rarement	Parfois	Souvent	Evénement certain
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0%	25%	50%	75%	100%

Pour t'entraîner :

1. La figure ci-contre représente une roue tournante divisée en 8 secteurs identiques et coloriés. Trouve la probabilité que **La flèche s'arrête sur la couleur** : ....:

   A blanche. B blanche ou rouge. C bleue.



2 **La figure ci-contre représente une roue tournante divisée en 8 secteurs identiques et coloriés. Trouve la probabilité que :**

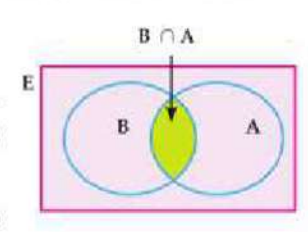


- **A** la flèche s'arrête sur la couleur verte.
- **B** la flèche s'arrête sur la couleur jaune.
- **C** la flèche s'arrête sur la couleur bleue.

Opérations sur les événements :

Puisque les événements sont des sous-ensembles de l'espace des éventualités (E), donc les opérations sur les événements sont les mêmes que sur les sur les ensembles comme l'union et l'intersection. En considérant l'espace des éventualités (E) comme l'ensemble référentiel, on peut exprimer les événements et les opérations sur eux par des diagrammes de Venn comme suit :

[1] L'intersection :



Soient A et B deux événements d'un l'espace des éventualités (E). L'intersection des deux événements A et B, noté $A \cap B$ signifie la réalisation des deux événements à la fois.

Notons que : On dit qu'un événement est réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de l'ensemble exprimant cet événement.



On dispose de 8 cartes identiques numérotées de 1 à 8 . On mélange ces cartes puis on tire une carte au hasard.



1 Ecris l'espace des éventualités.

2 Ecris les événements suivants.

- **A** L'événement A : « La carte tirée porte un nombre pair ».
- **B** L'événement B : « La carte tirée porte un nombre premier ».
- **C** L'événement C : « La carte tirée porte un nombre divisible par 4 ».

3 Utilise le diagramme de Venn pour calculer la probabilité des événements suivants :

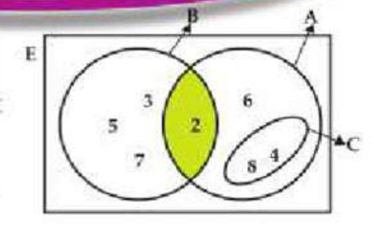
- **A** La réalisation des deux événements A et B ensemble.
- **B** La réalisation des deux événements A et C ensemble.
- **C** La réalisation des deux événements B et C ensemble.

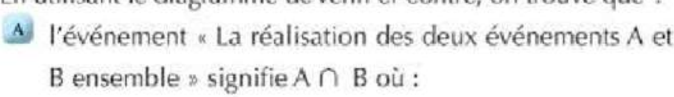
Solution

1 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, card (E) = 8

2 **A** $A = \{2, 4, 6, 8\}$ **B** $B = \{2, 3, 5, 7\}$ **C** $C = \{4, 8\}$


3 En utilisant le diagramme de Venn ci-contre, on trouve que :




A l'événement « La réalisation des deux événements A et B ensemble » signifie $A \cap B$ où :

$A \cap B = \{2\}$. C'est un ensemble qui contient un seul élément.

$\therefore$ card $(A \cap B) = 1$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et B ensemble $= P(A \cap B)$

$$= \frac{\text{card } (A \cap B)}{\text{card } (E)} = \frac{1}{8}$$

B l'événement « La réalisation des deux événements A et C ensemble » signifie $A \cap C$ où :

$A \cap C = \{4, 8\}$ $\therefore$ card $(A \cap C) = 2$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et C ensemble $= P(A \cap B)$

$$= \frac{\text{card } (A \cap C)}{\text{card } (E)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

C l'événement « La réalisation des deux événements B et C ensemble » signifie $B \cap C$ où :

$B \cap C = \phi$ (car B et C sont deux ensembles disjoints) $\therefore$ card $(B \cap C) = 0$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux B et C ensemble $= P(B \cap C)$

$$= \frac{\text{card } (B \cap C)}{\text{card } (E)} = \frac{0}{8} = 0$$

Remarque que : les deux événements B et C ne peuvent pas être réalisés simultanément. On dit que B et C sont deux événements incompatibles.

Les événements incompatibles





On dit que deux événements A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \phi$

On dit que plusieurs événements sont incompatibles s'ils sont incompatibles deux à deux

Pour t'entraîner : On jette un dé une seule fois :



1 Ecris l'espace de éventualités.

2 Ecris les événements suivants :

a A : « obtenir un nombre pair ». b B : « obtenir un nombre impair ».

c C : « obtenir un nombre premier et pair ».

3 Calcule les probabilités suivantes :

a « La réalisation de A et B ensemble ». b « La réalisation de A et C ensemble ».

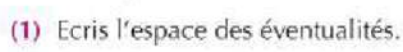
[2] *Union*

Soient A et B deux événements d'un l'espace des éventualités (E). La réunion des deux événements A et B, notée $A \cup B$, signifie la réalisation de A ou de B ou A et B à la fois. C'est donc l'événement de la réalisation d'au moins l'un des deux événements.



Exemple

1 On dispose de 9 cartes identiques numérotées de 1 à 9 . On mélange ces cartes puis on tire une carte au hasard.



(1) Ecris l'espace des éventualités.



(2) Ecris les événements suivants :

A L'événement A : « La carte tirée porte un nombre pair ».

B L'événement B : « La carte tirée porte un nombre divisible par 3 ».

C L'événement C : « La carte tirée porte un nombre premier plus grand que 5 ».

(3) Utilise le diagramme de Venn pour calculer la probabilité des événements suivants :

a La réalisation de A ou B **b** La réalisation A ou C

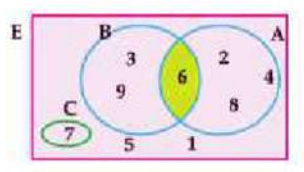
c Calcule $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

Solution

(1) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, card (S) = 9

(2) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, card (A) = 4 , $B = \{3, 6, 9\}$, card (B) = 3 , $C = \{7\}$, card (C) = 1

(3) In the venn diagram opposite :



A l'événement « La réalisation de A ou B » signifie $A \cup B$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, card $(A \cup B) = 6$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation de A ou B ensemble $= P(A \cup B)$

$$= \frac{\text{card } (A \cup B)}{\text{card } (E)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

B l'événement « La réalisation A ou C » signifie $A \cup C$ où :

$A \cup C = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, card $(A \cup C) = 5$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et C ensemble $= P(A \cup C)$

$$= \frac{\text{card } (A \cup C)}{\text{card } (E)} = \frac{5}{9}$$

C $P(A) = \frac{\text{card } (A)}{\text{card } (E)} = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{\text{card } (B)}{\text{card } (E)} = \frac{3}{9}$

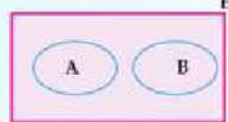
$A \cap B = \{6\}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{\text{card } (A \cap B)}{\text{card } (S)} = \frac{1}{9}$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ **(1)**

, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ **(2)**

De **(1), et (2)** on obtient $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

Remarque : De la figure ci-contre, A et B sont deux événements incompatibles de l'espace des éventualités E. Donc :.





1. $A \cap B = \phi$
2. $P(A \cap B) = \dfrac{\text{card } \phi}{\text{card (E)}} = \dfrac{0}{\text{card (E)}} =$ Zéro

On remarque que les deux événements A et C sont incompatibles.

Donc $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ mais $(A \cap C) =$ zéro

$\therefore\ P(A \cup C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} -$ zéro

$= \frac{5}{9}$ comme nous l'avons déjà trouvé

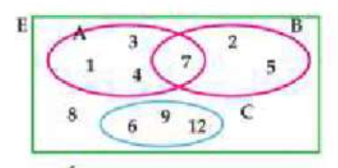
Donc si A et C sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$



1. Si A et B sont deux événements d'un l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire, complète :

A	B	C
$P(A) = 0.2$	$P(A) = 0.55$	$P(A) =$ ....
$P(B) = 0.6$	$P(B) = \frac{3}{10}$	$P(B) = \frac{1}{4}$
$P(A \cap B) = 0.3$	$P(A \cap B) =$	$P(A \cap B) =$ zéro
$P(A \cup B) =$	$P(A \cup B) = \frac{13}{20}$	$P(A \cup B) = 0.9$

2. En utilisant le diagramme de Venn ci-contre, trouve :



   - **A** $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$
   - **B** $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$
   - **C** $P(B \cap C)$ et $P(B \cup C)$



Exercises 3-1

[1] Si A et B sont deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire, résous chacun des cas suivants

1. Si $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ trouve $P(A \cup B)$
2. Si $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ trouve $P(A \cap B)$
3. Si $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ trouve $P(A \cup B)$ dans les deux cas suivants
   - **A** $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$
   - **B** A et B sont deux événements incompatibles

[2] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors P (A + B) est égal à

   A ϕ B 0 C 0.56 D 1

2. Si $A \subset B$, alors $P(A \cup B)$ est égal à:

   A zéro B P (A) C P (B) D $P(A \cap B)$

3. Si on jette une pièce de monnaie non pipée une seule fois, alors la probabilité d'avoir pile ou face est égale à

   A 0 % B 25 % C 50 % D 100%

4. Si on jette un dé une seule fois, alors la probabilité d'obtenir un nombre pair et un nombre impair à la fois est égale à

   A 0 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{3}{4}$ D 1

[3]

1. Une boîte contient 12 boules parmi lesquelles 5 sont bleues, 4 sont rouges et les autres boules sont blanches. On tire une boule au hasard. Calcule la probabilité que la boule tirée soit :

   A bleue B non rouge C bleue ou rouge

2. Un sac contient 20 cartes identiques numérotées de 1 à 20. On tire une carte au hasard. Calcule la probabilité que le nombre inscrit sur la carte tirée soit :

   A nu nomber divisible par 5. B nu nomber **impair et** divisible par 5.

3. Si $P(B) = \frac{1}{12}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

   trouve P (A) dans les deux cas suivants :

   A A et B sont deux événements incompatibles B $B \subset A$

4. Parmi 20 cartes identiques numérotées de 1 à 20, on tire une carte au hasard. Calcule la probabilité que le nombre inscrit sur la carte tirée soit :

   A divisible par 3

   B divisible par 5.

   C divisible par 3 et divisible par 5.

   D divisible par 3 ou divisible par 5.



Evénement complémentaire et différence de deux événements

A apprendre :

- La notion de l'événement complémentaire.
- La notion de la différence de deux événements.

Expressions de base :

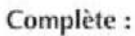
- événement complémentaire
- différence de deux événements

Réfléchis et discute

Dans le diagramme de Venn ci-contre :

Si E est l'ensemble référentiel et, $A \subset E$,

alors le complémentaire de l'ensemble A est A`



Complète :

1. A ∪ A` = ......... et A ∩ A` = ...
2. Si E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} A = {2, 4, 6} then: A` = {.............}.

Par exemple, on tire au hasard une boule d'une boîte qui contient 7 boules identiques numérotées de 1 à 7 et on observe le nombre inscrit sur cette boule A = {2, 4, 6}

L'événement A' : « la boule tirée porte un nombre impair »

où A'= {1, 3, 5, 7} est un événement complémentaire à l'événement A.

Evénement complémentaire :

L'événement complémentaire à l'événement A est A'. C'est la non réalisation de l'événement A.

Donc : Si $A \subset E$, alors A'est l'événement complémentaire à l'événement A.

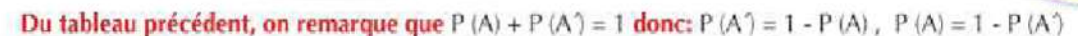
On a $A \cup A' = E$, $A \cap A' = \phi$

un événement et son événement complémentaire sont incompatibles.

Soit E l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire, $A \subset E$, A' est l'événement complémentaire de A et E = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }. Complète le tableau suivant et note tes remarques.

Complète le tableau suivant et note tes remarques

événement A	événement A'	P (A)	P (A')	P (A) + P (A')
{2, 4, 6}				
	{3, 6}			
{5}				
{1, 2, 3, 4, 5, 6}				



Du tableau précédent, on remarque que P (A) + P (A´) = 1 **donc:** P (A´) = 1 - P (A) , P (A) = 1 - P (A´)

Remarque : P (A) + P (A' = P (S) = 1

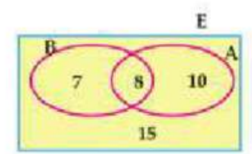


1. Dans une classe, il y a 40 élèves parmi lesquels, 18 élèves lisent le journal Al Akhbar, 15 élèves lisent le journal Al Ahram et 8 élèves lisent les deux journaux. On choisit au hasard un élève de la classe. Calcule la probabilité que l'élève choisi :

A lise le journal Al Akhbar. B ne lise pas le journal Al Akhbar.

C lise le journal Al Ahram. D lise les deux journaux.

Solution



Soient A l'événement : « lire le journal Al Akhbar » et B l'événement : « lire le journal Al Ahram »

Donc A ∩ B Rreprésente l'événement « lire les deux journaux »

card (E) = 40 , card (A) = 18 , card (B) = 15 , card (A ∩ B) = 8

A Pour l'événement A : « lire le journal Al Akhbar », on a = $\frac{\text{Card (A)}}{\text{Card (S)}} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

B L'événement : « ne pas lire le journal Al Akhbar » est un événement complémentaire à l'événement A. C'est donc l'événement A´.

$\therefore\ P(A') = \frac{\text{Card } A'}{\text{Card (E)}} = \frac{15+7}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$

Autre solution $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

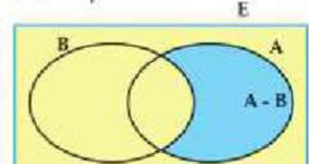
C Pour l'événement B : « lire le journal Al Ahram », on a $P(B) = \frac{\text{Card (B)}}{\text{Card (E)}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

D event A ∩ B représente l'événement « lire les deux journaux »r

$\therefore\ P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$



Réfléchis : Est-ce que l'événement « lire le journal Al Akhbar » a le même sens que l'événement « lire seulement le journal Al Akhbar » ? Justifie ta réponse.



On remarque que : l'événement « lire le journal Al Akhbar » est représenté dans le diagramme de Venn par l'ensemble A tandis que l'événement « lire seulement le journal Al Akhbar » signifie la lecture du journal Al Akhbar et ne pas lire d'autres journaux. Cet événement est représenté par l'ensemble A – B qui se lit **« A différence B ».**

Différence de deux événements :

Soient A et B deux événements d'un espace des éventualités E. A – B est l'événement de la réalisation de A et la non réalisation de B. Donc c'est l'événement de la réalisation de A seulement.
On remarque que : $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

Pour t'entraîner : **Dans l'exemple précédent, trouve :**

1. la probabilité que l'élève lise le journal Al Akhbar seulement.
2. la probabilité que l'élève lise le journal Al Ahram seulement.
3. la probabilité que l'élève lise le journal Al Akhbar seulement ou Al Ahram seulement.

Exercices généraux

1. On mélange 30 cartes identiques numérotées de 1 à 30 puis on tire une carte au hasard. Calcula la probabilité que la carte tirée porte un nombre :
   - A multiple de 6.
   - B multiple de 8.
   - C multiple de 6 et de 8
   - D multiple de 6 ou de 8.
2. Soient A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire. La probabilité de la réalisation de l'événement B est égale au triple de la probabilité de la réalisation de l'événement A et la probabilité de la réalisation de l'un au moins des deux événements est égale à 0,64. Calcule et la probabilité de la réalisation de chacun des deux événements A et B.
3. Soient A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,8$ and $P(B) = X$. Trouve la valeur de x.
   - A A, and B are two mutually exclusive events.
   - B $P(A \cap B) = 0.1$
4. Avec un dé pipé, la probabilité de l'apparition de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 est la même mais la probabilité de l'apparition du nombre 6 est le triple de la probabilité de l'apparition du nombre 1 ? On lance ce dé une seule fois. Calcule et la probabilité de :
   - A l'apparition d'un nombre impair premier
   - B l'apparition d'un nombre impair premier
5. Trois joueurs A, B et C ont participé à une compétition d'haltérophilie. Si la probabilité que le joueur A gagne est le double de la probabilité que le joueur B gagne et la probabilité que le joueur B gagne est égale à la probabilité que le joueur C gagne. Quelle est la probabilité que le joueur B ou le joueur C gagne sachant qu'un seul joueur gagne la compétition ?
6. Soit E l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire dont tous les événements ont les mêmes possibilités. A et B sont deux événements de E. Le nombre de résultats permettant de réaliser l'événement A est 13 et le nombre de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire est 24. Si $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(B) = \frac{5}{12}$ trouve la probabilité de la réalisation:
   - A de l'événement A.
   - B des deux événements A et B simultanément.

7 45 élèves d'une école participent à des activités sportives parmi lesquels, 27 élèves participent au football, 15 élèves participent au basket-ball et 9 élèves participent au football et au basket-ball. On choisit l'un de ces élèves au hasard. Trouve la probabilité que l'élève choisi :

A participe au football.
B participe au basket-ball.
C participe au football et au basket-ball.
D ne participe à aucune activité sportive.



Activité de l'unité

Dans le cadre d'une étude, on a choisi au hasard 6000 cas de naissance dans un gouvernorat. Les chercheurs se sont intéressés à la relation entre l'âge de la maman au moment de la naissance du bébé et son habitat. Le nombre de naissances dans l'urbain et le rural est indiqué dans le tableau suivant :

L'âge de la maman	Habitat	
	urbain	rural
Moins que 20 ans	120	240
De 20 ans à moins de 22 ans	240	360
De 22 ans à moins de 30 ans	1740	1440
30 ans ou plus	1500	360



1 Des données de la figure, que peux-tu conclure ?

2 Si l'événement A désigne une mère qui habite dans une zone urbaine et si l'événement B désigne une mère dont l'âge ne dépasse pas 22 ans, trouve :

A $P(A)$
B $P(B)$

3 Représente les deux ensembles A et B par un diagramme de Venn puis trouve :

A $P(A \cap B)$
B $P(A \cup B)$
C $P(A - B)$
D $P(A \cup B)'$

4 Donne une estimation du nombre de nombre de naissances si la mère habite dans une zone urbaine et a 30 ans ou plus sachant que le nombre de cas de naissances est 9000 dans le gouvernorat.

5 Ecris un rapport sur le taux de l'augmentation de la population et ses effets négatifs sur le revenu national et le rôle que les médias doivent jouer pour réduire l'impact de ce phénomène.



Epreuve de l'unité



[1] Complète ce qui suit :

1. Si la probabilité de la réalisation d'un événement A est 65 %, alors la probabilité de la non réalisation de A est égal à ....

2. Si P (A) = P (A`), alors P (A) = ...

3. Soient A et B deux événements incompatibles. Si P (A) = $\frac{1}{3}$ et P (A ∪ B) = $\frac{7}{12}$ alors P (B) = ...

4. Soient A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire. Si P (A) = 0.7 et P (A - B) = 0.5 , alors P (A ∩ B) = ...

[2]

1. Une boîte contient 20 boules de même volume et de même poids parmi lesquelles, 8 sont rouges, 7 sont blanches et les autres boules sont noires. On tire au hasard l'une de ces boules. Trouve la probabilité que la boule tirée soit :

   A rouge B blanche ou verte C non blanche

2. Un sac contient 30 cartes identiques numérotées de 1 à 30. On tire au hasard une carte. Trouve la probabilité que la carte tirée porte un nombre :

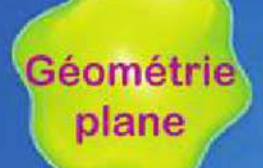
   A divisible par 3. B divisible par 5.

   C divisible par 3 et par 5. D divisible par 3 ou par 5.

3. Soient A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire. Si P (A) = 0,8 ; P (B) = 0,7 et P (A ∩ B) = 0,6 , trouve :

   A la probabilité de la non réalisation de l'événement A .

   B la probabilité de la réalisation de l'un au moins des deux événements.



Unité (4): Le cercle





Les conducteurs de voitures doivent bien connaître le code de la route et distinguer les différents signes.

En t'aidant des différentes ressources d'informations (Les offices de la gestion du trafic – la bibliothèque – l'internet – .....) fais une recherche sur le code de la route et la signalisation routière.







4 - 1

Définitions et notions de base



A apprendre

- Les notions de base concernant le cercle
- La notion de l'axe de symétrie d'un cercle

Expressions de base :

- cercle
- surface d'un cercle
- rayon d'un cercle
- corde
- diamètre d'un cercle
- axe de symétrie d'un cercle

Réfléchis et discute :

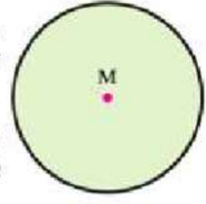


Youssef a exécuté le programme **Google Earth**, sur son ordinateur pour étudier la géographie de l'Egypte. Youssef a noté la présence de certains espaces verts circulaires près des zones désertiques. Il a posé des questions à son père concernant ces zones.

Son père lui a dit : Tu sais qu'une goute d'eau est source de vie. Pour cela, on rationalise la consommation de l'eau en irriguant la terre par la méthode de l'irrigation sur pivot central (irrigation par arrosage). Dans cette méthode, les roues de la machine tournent autour d'un point fixe en traçant des cercles

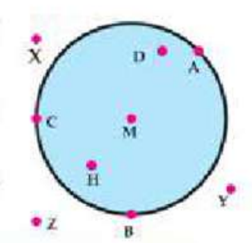
1. Comment peux-tu tracer le cercle central d'un terrain de football ?
2. Quel rôle peux-tu jouer pour rationnaliser la consommation de l'eau ?

Le cercle est un ensemble de points du plan qui se trouvent à une distance fixe d'un point fixe du plan. Le point fixe est appelé « le centre du cercle » et la distance fixe est appelée « le rayon du cercle ».



Habituellement, on appelle un cercle par son centre. Dire « un cercle M » signifie que le cercle a pour centre M comme dans la figure ci-contre.

Un cercle dans le plan partage les points du plan en trois ensembles de points comme dans la figure ci-contre. Ces trois ensembles sont :

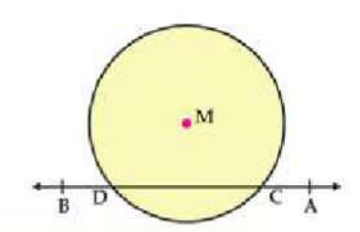


1. L'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle comme les points M, D, H, ...
2. L'ensemble des points du cercle comme les points A, B, C, ...
3. L'ensemble des points situés à l'extérieur du cercle comme les points X, Y, Z, ...

La surface d'un cercle : L'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle, L'ensemble des points du cercle.

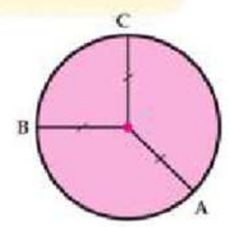


Dans la figure ci-contre, complète :



1. $\overleftrightarrow{AB}$ ∩ le cercle M = ...
2. $\overleftrightarrow{AB}$ ∩ la surface du cercle M = ...
3. M ∉ au cercle M mais M ∈ ....

Le rayon d'un cercle : c'est un segment ayant pour extrémités le centre du cercle et un point du cercle



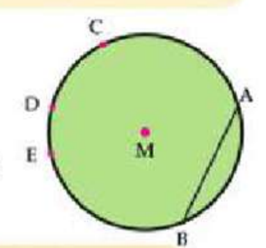
Dans la figure ci-contre, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ sont des rayons du cercle M où

MA = MB = MC = la longueur du rayon du cercle (r)

Si les rayons de deux cercles ont la même longueur, les deux cercles sont superposables

Une corde d'un cercle : c'est **un segment ayant pour extrémités deux points du cercle**



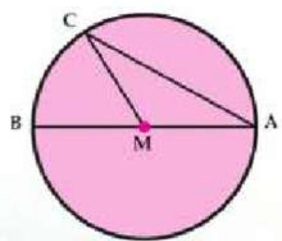


Dans la figure ci-contre :
Trace toutes les cordes du cercle ayant pour extrémités deux des points A, B, C, D et E.

Un diamètre d'un cercle : **c'est une corde qui passe par le centre du cercle**

Pour t'entraîner :

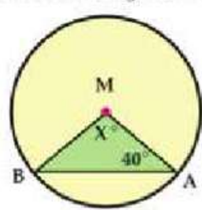
1. Dans la figure précédente, laquelle des cordes est un diamètre du cercle M ?
2. Quel est le nombre de diamètres d'un cercle ?
3. Pour démontrer qu'un diamètre d'un cercle est la plus longue corde, complète :
   Dans le triangle A M C : AM + MC > ....
   Dans le cercle M : CM = BM (rayons)
   Donc AM + ... > .... ∴ AB > ....



4 Si la longueur du rayon d'un cercle = r, alors la longueur d'un diamètre du cercle = ..., le périmètre du cercle = ... et l'aire du cercle = ...

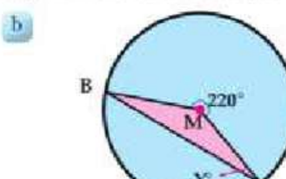
5 **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole désignant la mesure de l'angle :**

a



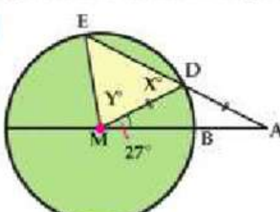
X = ...

b



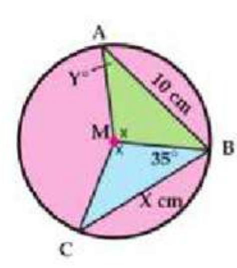
Y = ...

c



X = ..., Y = ...

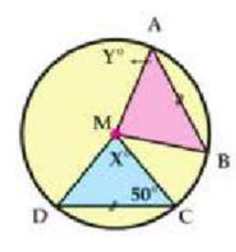
d



X = ..., Y = ...



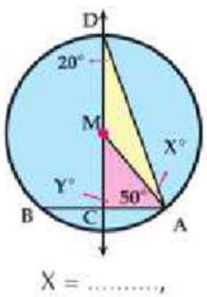
e



X = ..., Y = ...



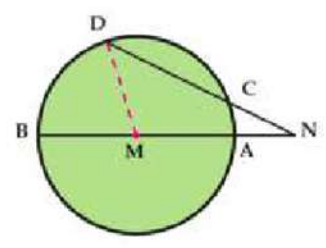
f



X = ..., Y = ...

Exemple 1

Dans la figure ci-contre : $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M. $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{DC} = \{N\}$. ***Démontre que :*** NB > ND.



Solution

On trace le rayon $\overline{MD}$. Dans le triangle N M D : M N + M D > N D

∵ M B = M D (rayons)

∴ M N + M B > N D

∴ N B > N D **(ce qu'il fallait démontrer)**



Pour t'entraîner :

Dans l'exemple précédent, démontre que N C > N A.

Symétrie dans un cercle :

Activité 1

1. A l'aide d'un compas, trace un cercle M sur un papier calque.
2. Trace une droite L_1 passant par le centre du cercle qui le coupe en deux arcs.
3. Plie le papier le long de la droite L_1. Que remarques-tu ?
4. Trace une autre droite L_2 passant par le centre du cercle, puis plie le papier le long de cette droite. Répète la dernière étape en traçant les droites L_3, L_4, ... Que remarques-tu dans chaque cas ?

De l'activité précédente, on déduit que :

> ***Toute droite passant par le centre d'un cercle est un axe de symétrie du cercle.***

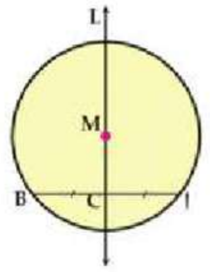


Réfléchis : Quel est le nombre d'axes de symétries d'un cercle ?

Activité 2

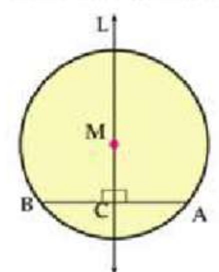
Observe chacune des figures suivantes (utilise les données de chaque figure). Que conclues-tu ?

1



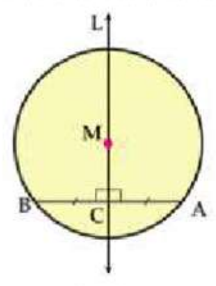
Conclusion :................

2



Conclusion :................

3



Conclusion :................



De 1	La droite passant par le centre d'un cercle et par le milieu d'une corde est perpendiculaire à cette corde.
De 2	La droite passant par le centre d'un cercle et perpendiculaire à une corde passe par le milieu de cette corde.
De 3	La droite passant par le milieu d'une corde d'un cercle et perpendiculaire à cette corde, passe par le centre du cercle.

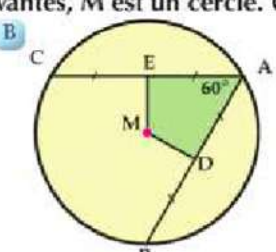
Pour t'entraîner :

1 **Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle. Complète :**

A

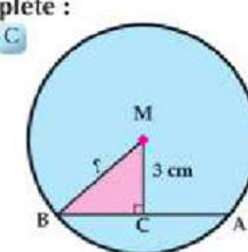
m (∠ M A C) = ...

B



m (∠ D M E) = ...

C

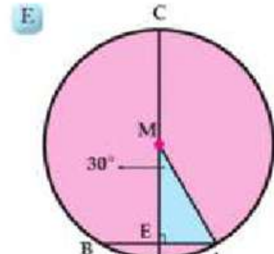


Si A B = 8 cm,
alors M B = ...

D

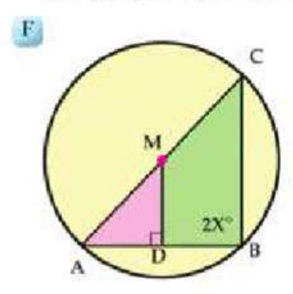
A B = ...

E

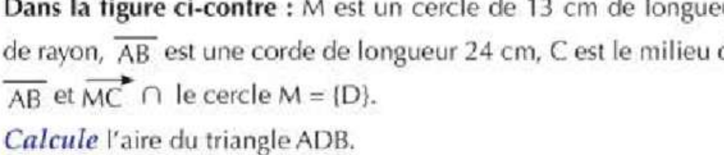


Si A B = 10 cm,
alors C D = ...

F

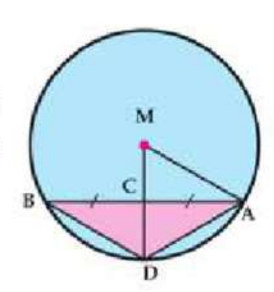


X = ...



2 **Dans la figure ci-contre :** M est un cercle de 13 cm de longueur de rayon, $\overline{AB}$ est une corde de longueur 24 cm, C est le milieu de $\overline{AB}$ et $\overrightarrow{MC} \cap$ le cercle M = {D}.

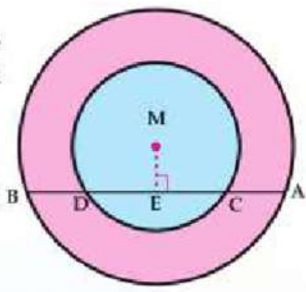
Calcule l'aire du triangle ADB.





Exemple 2

La figure ci-contre représente deux cercles concentriques de centre M, $\overline{AB}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en C et D. Démontre que AC = BD.



Solution

Hypothèses : $\overline{AB} \cap$ le petit cercle = {C, D}

Conclusion : A C = B D

Construction : On trace $\overline{ME} \perp \overline{AB}$ qui le coupe en E.

Démonstration : **Dans le grand cercle** $\overleftrightarrow{ME} \perp \overline{AB}$ $\therefore$ EA = EB **(1) (Corollaire)**

Dans le petit cercle $\overleftrightarrow{ME} \perp \overline{CD}$ $\therefore$ EC = ED **(2) (Corollaire)**

De (1) et (2) :

EA - EC = EB - ED $\therefore$ AC = BD **(ce qu'il fallait démontrer)**



Dans les figures ci-contre, cite tous les segments ayant des longueurs égales. Justifie ta réponse.

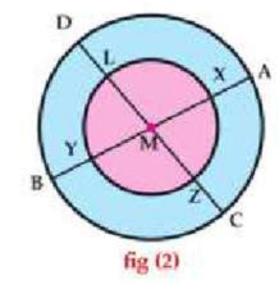


fig (2)

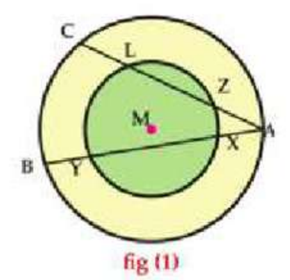


fig (1)



Exemple 3

Dans la figure M est un cercle, $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ et X est le milieu de $\overline{AB}$.

On trace $\overrightarrow{XM}$ qui coupe $\overline{CD}$ en Y. ***Démontre que :*** Y est le milieu de $\overline{CD}$

Solution

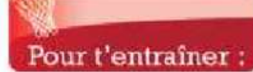
Hypothèses : $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$, AX = BX

Conclusion : CY = DY

Démonstration : $\because$ X est le milieu de $\overline{AB}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$

$\because$ $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$, $\overleftrightarrow{XY}$ est une sécante $\therefore$ m ($\angle$ DYX) = m ($\angle$ AXY) = 90° alternes internes

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MY} \perp \overline{CD}$ $\therefore$ Y est le milieu de $\overline{CD}$. (Ce qu´il fallcit démontrer)

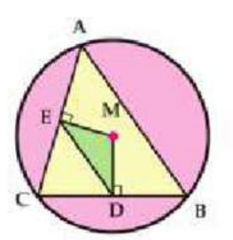


$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes parallèles d'un cercle M, AB = 12 cm et CD = 16 cm. Trouve la distance entre ces deux cordes sachant que la longueur de rayon du cercle M est 10 cm. Y a-t-il d'autres réponses ? Explique ta réponse.



Réfléchis : Si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes d'un cercle où AB > CD, laquelle des deux cordes est la plus proche du centre du cercle ? Explique ta réponse.

Exemple 4



Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre M, $\overline{MD} \perp \overline{BC}$, $\overline{ME} \perp \overline{AC}$.

Démontre que : 1) $\overline{ED} \,//\, \overline{AB}$

2) Le périmètre du $\Delta\, C\,D\,E = \frac{1}{2}$ Le périmètre du $\Delta\, A\,B\,C$

Solution

Hypothèses : $\overline{MD} \perp \overline{BC}$ et $\overline{ME} \perp \overline{AC}$

Conclusion : 1) $\overline{ED} \,//\, \overline{AB}$

2) Le périmètre du $\Delta\, C\,D\,E = \frac{1}{2}$ Le périmètre du $\Delta\, A\,B\,C$

Démonstration :

1) $\because$ $\overline{MD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ D est le milieu de $\overline{BC}$ **(1)**

$\because$ $\overline{ME} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ E est le milieu de $\overline{AC}$ **(2)**

Dans le $\Delta\, A\,B\,C$, D est le milieu de $\overline{BC}$ et E est le milieu de $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

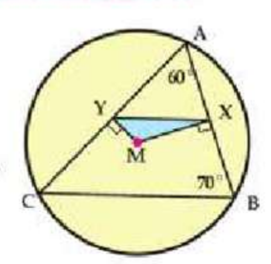
$D\,E = \frac{1}{2}\, AB$ **(3)**

2) **De (1), (2), (3) :**

$\therefore$ Le périmètre du $\Delta\, C\,D\,E = C\,D + C\,E + E\,D \quad = \frac{1}{2}\, C\,B + \frac{1}{2}\, AC + \frac{1}{2}\, A\,B$

$= \frac{1}{2}\,(C\,B + A\,C + A\,B) = \frac{1}{2}$ du périmètre du $\Delta\, A\,B\,C$

Pour t'entraîner :



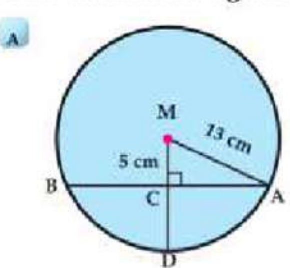
Dans la figure ci-contre : M est un cercle, $\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{AC}$, m ($\angle$ A) = 60°, m ($\angle$ B) = 70°.

Trouve les mesures des angles du triangle MXY.

Exercices (4-1)

1 **Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle. Complète :**

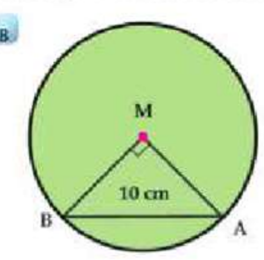
A



$AB = \ldots\ldots$

$CD = \ldots\ldots$

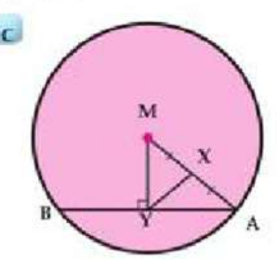
B



$m(\angle A) = \ldots\ldots$

$MA = \ldots\ldots$

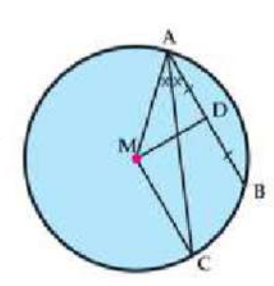
C



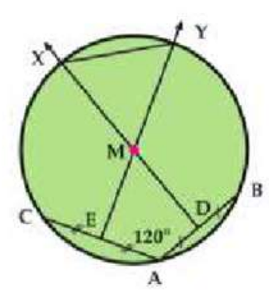
$XY = 7$ cm, $(\pi = \frac{22}{7})$

L'aire du cercle = …… cm²

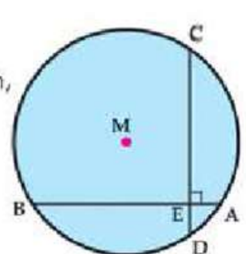
2 **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB}$ est une corde du cercle M, $\overrightarrow{AC}$ est une bissectrice de $\angle$ B A M qui coupe le cercle M en C. Si D est le milieu de $\overline{AB}$, ***démontre que*** $\overline{DM} \perp \overline{CM}$.



3 **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes d'un cercle de centre M formant entre elles un angle de mesure 120°, D et E sont les milieux de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ respectivement. On trace. $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{EM}$ qui coupent le cercle en X et Y respectivement. ***Démontre que*** le triangle XYM est équilatéral.



4 **Dans la figure ci-contre :** M est un cercle de longueur de rayon 7 cm, $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes perpendiculaires qui se coupent en E. Si AB = 12 cm et CD = 10 cm, ***trouve*** la longueur de $\overline{ME}$.





Positions relatives d'un point et d'une droite par rapport à un cercle.

A apprendre

- ☆ déterminer la position d'un point par rapport à un cercle
- ☆ déterminer la position d'une droite par rapport à un cercle
- ☆ déterminer la relation entre la tangente et le rayon d'un cercle
- ☆ déterminer la position d'un cercle par rapport à un autre cercle
- ☆ relation entre la droite des centres de deux cercles, la corde commune et la tangente commune

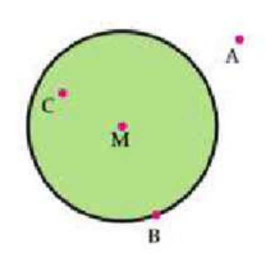
Expressions de base :

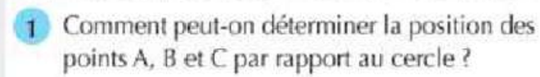
- ☆ un point à l'extérieur du cercle
- ☆ un point du cercle
- ☆ un point à l'intérieur du cercle
- ☆ deux cercles disjoints
- ☆ deux cercles sécants
- ☆ deux cercles tangents
- ☆ tangente commune
- ☆ droite des centres
- ☆ corde commune

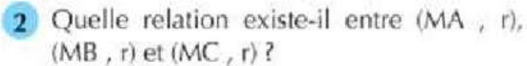
[1] Position d'un point par rapport à un cercle :

Réfléchis et discute :

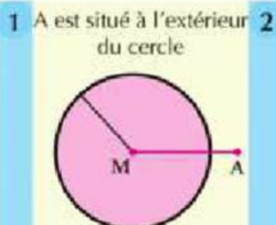
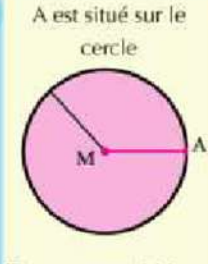
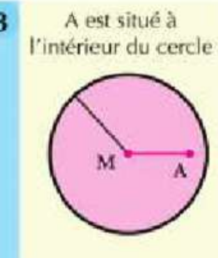
Dans la figure ci-contre, le cercle M partage les points du plan en trois ensembles de points.




1. Comment peut-on déterminer la position des points A, B et C par rapport au cercle ?


2. Quelle relation existe-il entre (MA , r), (MB , r) et (MC , r) ?

Si M est un cercle de longueur de rayon r et si A est un point du plan du cercle, alors :

1	2	3
A est situé à l'extérieur du cercle	A est situé sur le cercle	A est situé à l'intérieur du cercle
		
Dans ce cas, $MA > r$ La réciproque est vraie.	Dans ce cas, $MA = r$ La réciproque est vraie.	Dans ce cas, $MA < r$ La réciproque est vraie.

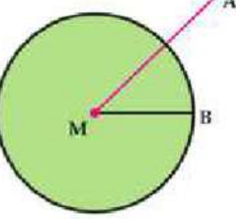
Pour t'entraîner :

Soit M un cercle de longueur de rayon 4 cm. A est un point du plan du cercle. Complète :

1. *Si* $MA = 4$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
2. *Si* $MA = 2\sqrt{3}$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
3. *Si* $MA = 3\sqrt{2}$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
4. *Si* $MA = 0$, alors A est situé .... cercle M et il est représenté par ....



Soit M un cercle de longueur de rayon 5 cm. A est point du plan du cercle, MA = (2x - 3) centimètres. Trouve les valeurs de x sachant que A est situé à l'extérieur du cercle.



Solution

∵ le point A est situé à l'extérieur du cercle ∴ M A > 5 d'où 2X - 3 > 5 2X > 8 ∴ X > 4

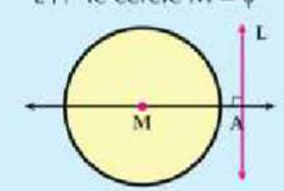
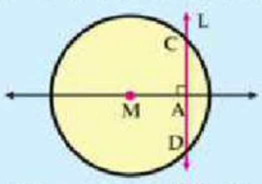
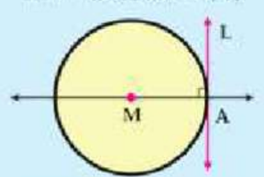
Pour t'entraîner :

Dans l'exemple précédent, trouve les valeurs de x dans chacun des cas suivants :

1. MA = 2x + 1 et A est un point du cercle.
2. MA = 8x – 27 et A est un point à l'intérieur du cercle.

[2] Position d'une droite par rapport à un cercle :

Soit M un cercle de rayon de longueur r. Si L est une droite du plan tel que $\overleftrightarrow{MA} \perp L$ où $\overleftrightarrow{MA} \cap L = \{A\}$, alors

1	2	3
La droite L est extérieure au cercle M. L ∩ le cercle M = ϕ	La droite L coupe le cercle M L ∩ le cercle M = {C, D}	La droite L est tangente au cercle M L ∩ le cercle = {A}
		
Dans ce cas : MA > r	Dans ce cas : MA < r	Dans ce cas : MA = r
La réciproque est vraie	La réciproque est vraie.	La réciproque est vraie.



Réfléchis : Dans chacun des cas précédents, trouve L ∩ la surface du cercle M

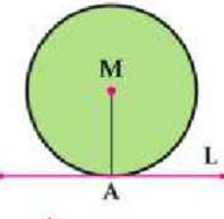
Pour t'entraîner :

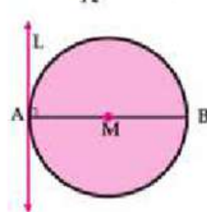
Soit M un cercle de rayon de longueur 7 cm. Si $\overline{MA} \perp$ L où A ∈ L. Complète:

1. *Si* MA = $4\sqrt{3}$ cm, alors la droite L ....
2. *Si* MA = $3\sqrt{7}$ cm, alors la droite L ....
3. *Si* 2 MA - 5 = 9, alors la droite L ....
4. *Si* la droite L coupe le cercle M et MA = 3x -5, alors x ∈ ....
5. *Si* la droite L est une tangente au cercle M et MA = $x^2 - 2$, alors x ∈ ....



1 La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle qui passe par le point de contact.





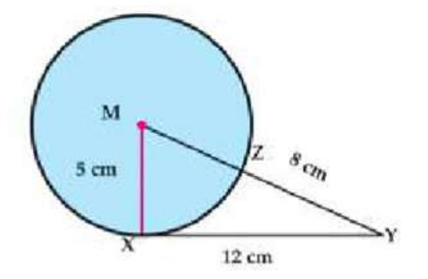
2 La droite perpendiculaire à un diamètre d'un cercle en l'une de ses extrémités est une tangente au cercle.



1 **Combien de tangentes peut-on tracer au cercle M ?**
a) d'un point donné du cercle.
b) d'un point donné à l'extérieur du cercle.

2 Quelle relation existe-il entre les deux tangentes tracées aux deux extrémités d'un diamètre d'un cercle ?

Exemple 2



Dans la figure ci-contre, M est un cercle de longueur de rayon 5 cm, XY = 12 cm, $\overline{MY} \cap$ le cercle M = {Z} et ZY = 8 cm.

Démontre que : $\overleftrightarrow{XY}$ est une tangente au cercle M au point X.

Solution

$\because$ $\overline{MY} \cap$ le cercle M = {Z} $\qquad \therefore$ MY = MZ + ZY

$\because$ MZ = MX = 5 cm (rayons) $\qquad \therefore$ MY = 5 + 8 = 13 cm

$\because$ $(MY)^2 = (13)^2 = 169$, $(MX)^2 = (5)^2 = 25$, $(XY)^2 = (12)^2 = 144$

$\therefore$ $(MX)^2 + (XY)^2 = 25 + 144 = 169 = (MY)^2$

$\therefore$ $m(\angle MXY) = 90°$ **(réciproque du théorème de Pythagore)**

$\because$ $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{MX}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XY}$ est une tangente au cercle au point X. **(ce qu'il fallait démontrer)**



1 Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle **et** $\overleftrightarrow{AB}$ **, une tangente. Complète :**

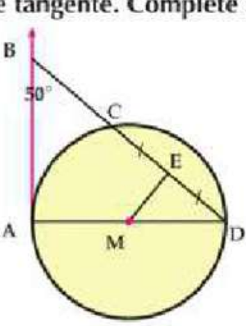
A

m (∠ A M B) = ...

B

m (∠ A D B) = ...

C

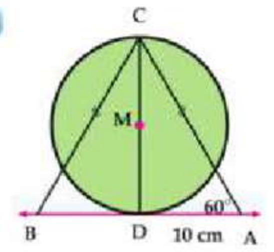


m (∠ A M E) = ...

D

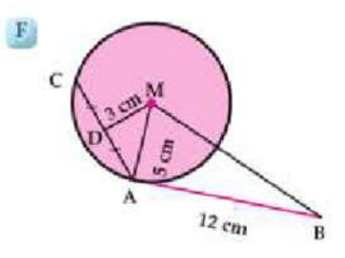
D B = ... cm

E



Le périmètre du Δ A B C = ... cm

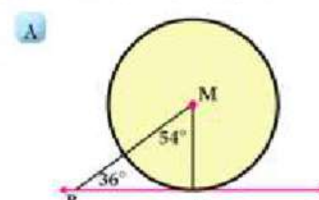
F



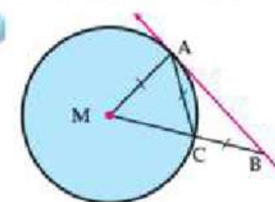
Le périmètre de la figure A B M D = ... cm

2 **Dans chacune des figures suivantes, explique pourquoi** $\overleftrightarrow{AB}$ **est une tangente au cercle M :**

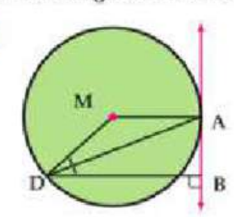
A



B

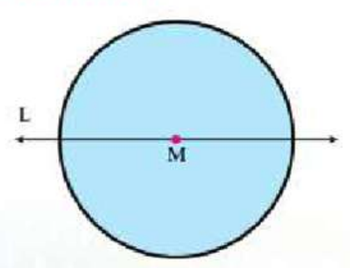


C



[3] Position d'un cercle par rapport à un autre cercle :

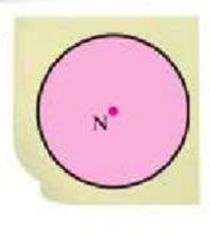
Activité



1 Trace un cercle de centre M et de rayon de longueur convenable = r_1 cm.

2 Trace un axe de symétrie L du cercle M comme le montre la figure ci-contre.

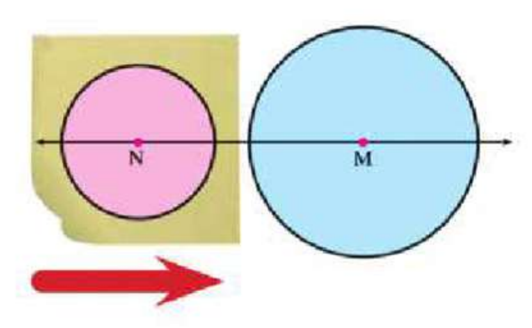
3 Sur un papier calque : Trace un cercle de centre N et de longueur de rayon convenable = r_2 cm où $r_2 < r_1$.



4 Pose le papier calque de sorte que le point N appartient à la droite L

On remarque que : L = $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{MN}$ est appelée la droite des centres des deux cercles M et N. $\overleftrightarrow{MN}$ est aussi un axe de symétrie de la figure composée des deux cercles.

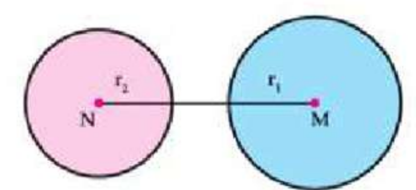
5 Déplace le papier calque vers le cercle en gardant le point N sur la droite L pour voir des positions différentes de l'un des deux cercles par rapport à l'autre. Mesure la longueur de $\overline{MN}$ dans chaque cas. Quelle est la relation entre la longueur de $\overline{MN}$ **(la distance entre les centre des deux cercle M et N)**, $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ dans chaque position



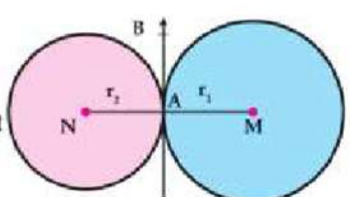
Pour t'entraîner :

Soient M et N deux cercles d'un même plan de longueurs de rayons respectives r_1 et r_2 où $r_1 > r_2$. Complète :

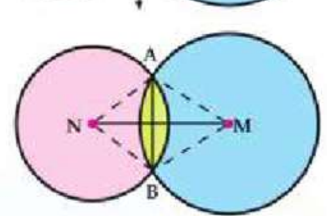
1 Si MN > $r_1 + r_2$, alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont disjoints extérieurement.



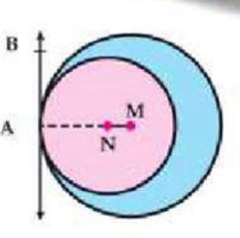
2 Si MN = $r_1 + r_2$, alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont tangents extérieurement



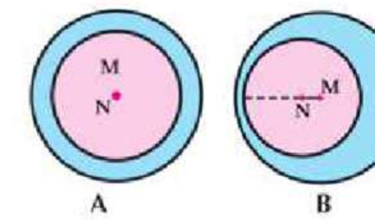
3 Si $r_1 - r_2$ < M N < $r_1 + r_2$,
alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = la surface de la région Verte. Dans ce cas, les deux cercles sont sécants.



4. Si M N = $r_1 - r_2$, alors M ∩ N = ... ,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont tangents intérieurement



5. Si M N < $r_1 - r_2$,alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont disjoints intérieurement comme dans la figure ....
Si MN = 0, les deux cercles sont concentriques comme dans la figure ....





Résultats :

1. La droite des centres de deux cercles tangents passe par le point de contact et est perpendiculaire à la tangente commune.
2. La droite des centres de deux cercles sécants est perpendiculaire à la corde commune et passe par son milieu.



Exemple 3

Soient M et N deux cercles de longueurs de rayons respectives 9 cm et 4 cm. Détermine la position de chaque cercle par rapport à l'autre dans chacun des cas suivants :

A. MN = 13 cm B. M N = 5 cm C. M N = 3 cm
D. M N = zéro E. M N = 10 cm F. M N = 15 cm

Solution

∵ $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 4$ cm ∴ $r_1 + r_2 = 13$ cm et $r_1 - r_2 = 5$ cm

A. M N = 13 cm ∴ M N = $r_1 + r_2$ ∴ les deux cercles sont tangents extérieurement.

B. M N = 5 cm ∴ M N = r_1 - ∴ les deux cercles sont tangents intérieurement.

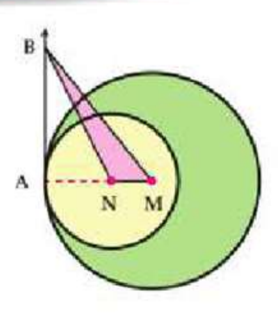
C. M N = 3 cm ∴ M N < $r_1 - r_2$, M N ≠ 0 ∴ les deux cercles sont disjoints intérieurement

D. M N = 0 ∴ les deux cercles sont concentriques

E. M N = 10 cm ∴ $r_1 - r_2$ < M N < $r_1 + r_2$ ∴ les deux cercles sont sécants

F. M N = 15 cm ∴ M N > $r_1 + r_2$ ∴ les deux cercles sont disjoints extérieurement.

Exemple 4



Soient M et N deux cercles tangents intérieurement en A, de longueurs de rayons respectives 10 cm et 6 cm, $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune en A. Si l'aire du triangle B M N = 24 cm², ***trouve*** la longueur de $\overline{AB}$.

Solution

$\because$ Les deux cercles sont tangents intérieurement en A

$\therefore$ A $\in \overleftrightarrow{MN}$ et $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$

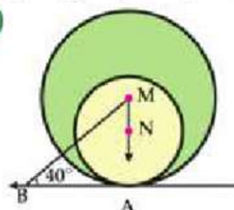
Donc AB est la longueur de la hauteur du triangle BMN correspondant à la base $\overline{MN}$

où M N = 10 - 6 = 4 cm (Pourquoi ?)

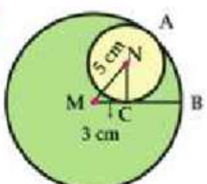
L'aire du Δ B M N $= \frac{1}{2} \times$ M N $\times$ A B $\therefore$ $24 = \frac{1}{2} \times 4 \times$ A B $\therefore$ A B = 12 cm

Pour t'entraîner :

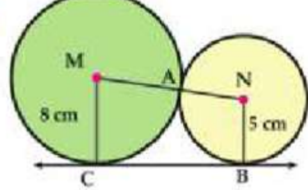
Dans chacune des figures suivantes, les deux cercles sont tangents. A l'aide des données de chaque figure, complète :

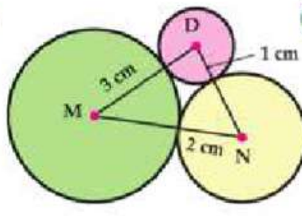
m ($\angle$ B M N) = ...°

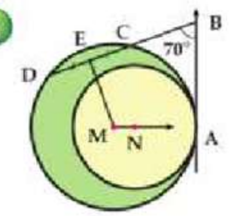
B C = ... cm

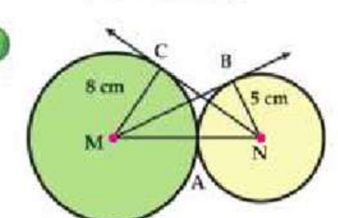
B C = ... cm

m ($\angle$M D N) = ... °

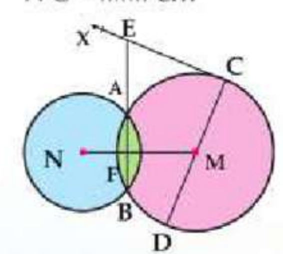


m ($\angle$ E M N) = ...°



M B = ... cm,
N C = ... cm

Exemple 5



M et N sont deux cercles sécants en A et B, $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle M. $\overrightarrow{CX}$ est tangente au cercle M en C. $\overrightarrow{CX} \cap \overrightarrow{BA}$ = {E}, $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB}$ = {F}. ***Démontre que :*** m($\angle$ DMN) = m($\angle$ CEB).

Solution

Hypothèses : Le cercle M ∩ le cercle N = {A, B}, $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle, $\overrightarrow{CX}$ est une tangente au cercle M.

Conclusion : Démontre que : m (∠ D M N) = m (∠ C E B).

Démonstration : ∵ La droite des centres de deux cercles sécants est perpendiculaire à la corde commune.

∴ $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ i.e m(∠ A F M) = 90°

∵ $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle M et $\overrightarrow{CX}$ est une tangente au cercle M en C

∴ $\overrightarrow{CX} \perp \overline{CD}$ d'où m (∠ E C D) = 90°

∴ m (∠ C E F) + m(∠ C M F) = 360° - (90° + 90°) = 180° **(Pourquoi ?)**

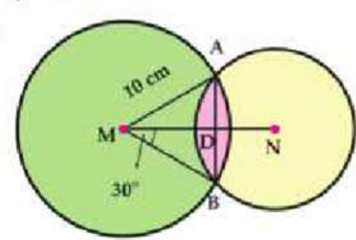
∵ m (∠ D M F) + m (∠ C M F) = 180°

∴ m (∠ D M N) = m (∠ C E F) **(Ce qu'il fallait démontrer)**

Pour t'entraîner :

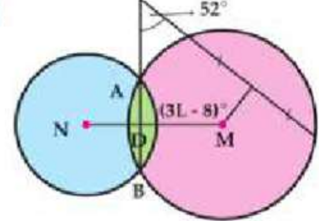
1 **Dans chacune des figures suivantes, M et N sont deux cercles sécants en A et B. Complète :**





A B = ... cm





L = ...

Remarque que :

Dans le triangle ABC rectangle en A, si on trace $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, alors :

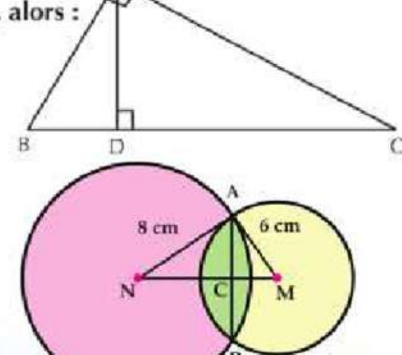
$(AB)^2 = BD \times BC$ ***(théorème d'Euclide)***

, $(AD)^2 = DB \times DC$ ***(corollaire)***

, $AD \times BC = AB \times AC$ ***Pourquoi ?***

2 **Dans la figure ci-contre :** M et N sont deux cercles sécants en A et B, $\overline{MN} \cap \overline{AB} = \{C\}$, A M = 6 cm. A N = 8 cm et $\overline{MA} \perp \overline{AN}$.

Trouve la longueur de $\overline{AB}$.






Exercices (4-2)

1 **Complète ce qui suit :**

A Si la longueur d'un diamètre d'un cercle est 8 cm et si L est une droite qui se trouve à une distance 4 cm du centre du cercle, alors L est ....

B Si la surface d'un cercle M ∩ la surface d'un cercle N = {A}, alors les deux cercles sont ....

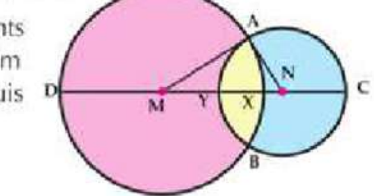
C Si M et N sont deux cercles sécants de longueurs de rayons respectives 3 cm et 4 cm, alors MN ∈ ....

D Si l'aire d'un cercle M = 16π cm^2 et si A est un point de son plan tel que MA = 8 cm, alors A .... cercle M

E Si M est un cercle de longueur de diamètre 6 cm et L est une droite extérieure au cercle, alors la distance entre le centre du cercle et la droite L ∈ ....

F Si un cercle a pour longueur de diamètre (2x + 5) cm et L est une droite distante de (x + 2) cm du centre du cercle, alors la droite L est ....

2 **Dans la figure ci-contre,** M et N sont deux cercles sécants en A et B ayant pour longueurs de rayons 8 cm et 6 cm respectivement et XY = 4 cm. Observe la figure, puis réponds aux questions suivantes :



A ***Complète :*** Y M = ... cm , C X = ... cm et C D = ... cm

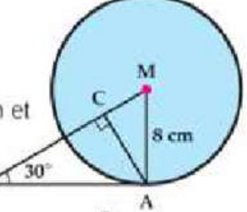
B Est-ce que le périmètre du triangle ANM = la longueur de $\overline{CD}$? Justifie ta réponse.

C Quelle est la mesure de l'angle NAM

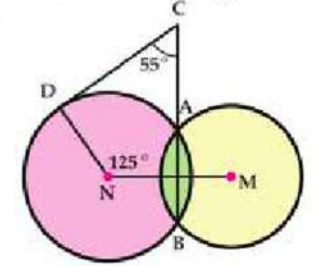
D Trouve l'aire du triangle NAM.

E Quelle est la longueur de la corde commune $\overline{AB}$?

3 **Dans la figure ci-contre :** $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en A, MA = 8 cm et m (∠ A B M) = 30°. ***Trouve*** la longueur de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$



4 **Dans la figure ci-contre : M et N sont deux cercles sécants en A et B. C ∈ $\overrightarrow{BA}$**, D ∈ cercle N, m(∠ MND) = 125 ° et m(∠ B C D) = 55°. ***Démontre que*** $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle N en D.



5 $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M , $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, sont tangentes au cercle M, $\overrightarrow{CM}$ coupe le cercle M en X et Y et $\overleftrightarrow{BD}$ en E. ***Démontre que*** C X = Y E.

6 M et N sont deux cercles sécants en A et B, MA = 12 cm, NA = 9 cm et MN = 15 cm. ***Trouve*** la longueur de $\overline{AB}$.

4 - 3

Détermination d'un cercle

Réfléchis et discute



- Pourquoi utilise-t-on le compas pour tracer un cercle ?
- Quel est l'axe de symétrie d'un segment ?
- Est-ce que le centre d'un cercle appartient toujours à la médiatrice d'une corde quelconque ?
- Comment peut-on dessiner (déterminer) un cercle dans un plan ?



A apprendre

- ☆ Comment tracer un cercle passant par un point donné.
- ☆ Comment tracer un cercle passant par deux points donnés.
- ☆ Comment tracer un cercle passant par trois points donnés.

Nous pouvons dessiner (déterminer) un cercle dans des conditions données en connaissant :

1 le centre du cercle. 2 la longueur de son rayon.

[1]: *Tracer un cercle passant par un point donné :*

Hypothèses : A est un point donné d'un plan.

Conclusion : Tracer un cercle passant par A.

Construction :

1. Choisis un point M du plan .
2. Mets la pointe sèche du compas en M avec un écartement équivalent à MA puis trace le cercle M. Tu trouves que le cercle M passe par le point A.
3. Mets la pointe sèche du compas en un autre point M_1 avec un écartement équivalent à MA puis trace le cercle M_1. Tu trouves que le cercle M passe par le point A.
4. Répète le travail précédent en choisissant d'autres points.



Expressions de base :

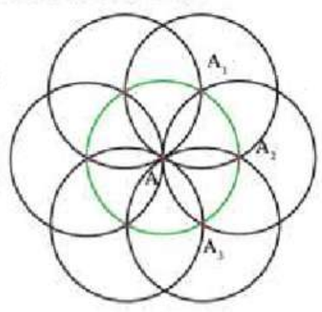
- ☆ Cercle circonscrit à un triangle

Remarque que : ***Pour tout point choisi comme centre du cercle, on peut tracer un seul cercle passant par A.***

✍ Combien y a-t-il de points dans un plan ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par le point A ?

✍ Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, où se trouvent leurs centres ?

De ce qui précède, on déduit que :



1. On peut tracer une infinité de cercles passant par un point donné comme A.
2. Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, leurs centres appartiennent à un même cercle de centre A, superposable à ces cercles.



Soit L une droite du plan. A est un point du plan où $A \in L$. En utilisant les instruments de la géométrie, trace un cercle passant par A de longueur de rayon 2 cm. Combien de cercles peux-tu tracer ? (N'efface pas les arcs).

[2] Tracer un cercle passant par deux points donnés :

Hypothèses : A et B sont deux points donnés d'un plan.

Conclusion : Tracer un cercle M passant par les deux points A et B ($\overline{AB}$ est une corde du cercle M).

Construction :

1. Trace un segment $\overline{AB}$.
2. Trace la droite L, médiatrice de $\overline{AB}$ où $L \cap \overline{AB} = \{F\}$
   (Le centre du cercle appartient à la médiatrice de la corde $\overline{AB}$).
3. D'un point quelconque M de la droite L, trace un cercle de centre M et de rayon MA. Ce cercle passera par le point B.
4. D'un autre point quelconque M_1 de la droite L, trace un cercle de centre M_1 et de rayon MA_1, Ce cercle passera aussi par le point B.
5. Répète le travail précédent en choisissant d'autres points et observe la figure obtenue :

Remarque que : Pour tout point choisi comme centre du cercle, on peut tracer un seul cercle passant par les deux points A et B

✍ Quel est le nombre de points de la droite L ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?

✍ Quelle est la longueur du rayon du plus petit cercle qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?

✍ Deux cercles différents peuvent-ils se couper en plus de deux points ?



De ce qui précède, on déduit que :

1. On peut tracer une infinité de cercles passant par deux points donnés comme A et B.
2. La longueur du rayon du plus petit cercle qu'on peut tracer passant par les deux points A et B est égale à $\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$.
3. Deux cercle différents ne peuvent pas se couper en plus que deux points.



Utilise les instruments géométriques pour tracer un segment $\overline{AB}$ de longueur 4 cm. Sur une même figure, trace :

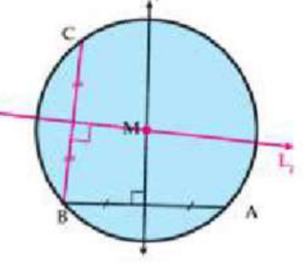
1. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 5 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?
2. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 2 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?
3. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 3 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?

[3] Tracer un cercle passant par trois points donnés :

Hypothèses : **A, B et C sont sont trois points donnés d'un plan.**

Conclusion : Tracer un cercle M passant par les trois points A, B et C.



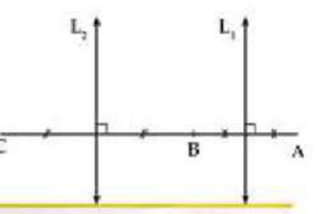


Construction :

1. Trace la droite L_1 médiatrice de $\overline{AB}$. Donc $M \in L_1$.
2. Trace la droite L_2 médiatrice de $\overline{BC}$. Donc $M \in L_2$.
3. Si $L_1 \cap L_2 = \{M\}$. Trace un cercle de centre M et de rayon MA. Ce cercle passera par les deux points A et B.
4. Si $L_1 \cap L_2 = \phi$, peux-tu déterminer la position du point M ? Explique ta réponse.

Remarque que :

Si A, B, et C sont trois points alignés, alors $L_1 // L_2$ et $L_1 \cap L_2 = \phi$
Dans ce cas, on ne peut pas tracer un cercle passant par les trois points A, B et C.



De ce qui précède, on déduit que :

Par trois points non alignés passe un et un seul cercle.



Utilise les instruments géométriques pour tracer un triangle ABC tel que AB = 4 cm, BC = 5 cm et CA = 6 cm, puis trace le cercle passant par les points A, B et C. Quelle est la nature de ce triangle par rapport à ses angles ? Où se trouve le centre du cercle par rapport au triangle ?

Résultats



Le cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé «un cercle circonscrit au triangle .

On dit qu'un triangle est inscrit dans un cercle si les sommets du triangle sont situés sur le cercle.



Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un seul point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle

 **Exercices (4-3)** 

1. **Trace un triangle XY Z tel que XY = 5 cm, Y Z = 3 cm et Z X = 7 cm, puis trace le cercle circonscrit au triangle.**
   - A. Quelle est la nature du triangle XY Z par rapport à ses angles ?
   - B. Où se trouve le centre du cercle par rapport au triangle ?

2. Trace un triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 3 cm puis trace le cercle circonscrit au triangle. Où se trouve le centre du cercle par rapport aux côtes du triangle ?

3. Trace un triangle équilatéral ABC de longueur de côté 4 cm, puis trace le cercle circonscrit au triangle ABC.
   - A. Détermine la position du centre du cercle par rapport aux : hauteurs du triangle – médianes du triangle – bissectrices des angles du triangle.
   - B. Quel est le nombre d'axes de symétrie d'un triangle équilatéral ?

4 - 4 Relation entre les cordes d'un cercle et son centre

Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre :

A est un point du cercle M. On trace les cordes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ et $\overline{AF}$.

1. Quelle est la relation entre la longueur d'une corde et la distance entre cette corde et le centre du cercle.
2. Si deux cordes sont de même longueur, que peux-tu déduire ?
3. Si des cordes sont équidistantes du centre du cercle, à quoi peux-tu t'attendre ?

Remarque que :

Dans le cercle M de longueur de rayon r, la distance de la corde $\overline{AE}$, au centre du cercle est MX où X est le milieu de $\overline{AE}$

On a : $(MX)^2 + (AX)^2 = (AM)^2 = r^2$ **(constante)**

Donc :

La corde la plus proche du centre a la plus grande longueur et réciproquement.



A apprendre

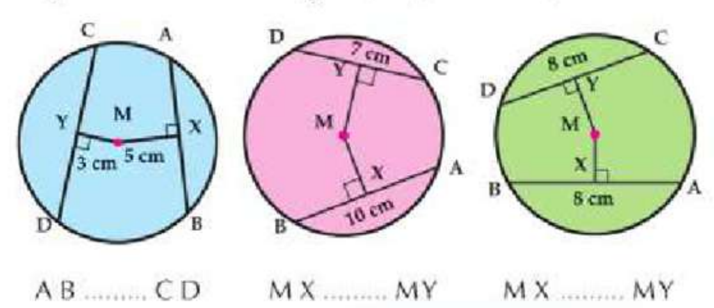
- Déduire la relation entre les cordes d'un cercle et son centre
- Résoudre des problèmes sur la relation entre les cordes d'un cercle et son centre

Expressions de base :

- des cordes de même longueur
- cercles superposables

Pour t'entraîner :

1. **Complète en utilisant les signes (> , < ou =) :**



A B .... C D M X .... MY M X .... MY

2 **Dans la figure ci-contre, M F < M E.** ***Complète*** **:**

∵ M F < M E

∴ X + 1 > ....

∵ $\overline{CD}$ est une corde du cercle M

∴ X ⩽ ....

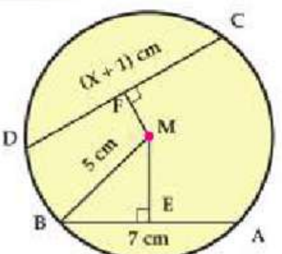
∴ C D > ....

X > ....

∴ C D ⩽ ....

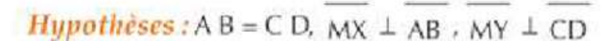
d'où .... < X ⩽ ....

Donc: X ∈ ....



Théorème

Dans un cercle, les cordes ayant la même longueur sont équidistantes du centre du cercle.



Hypothèses : A B = C D, $\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{CD}$

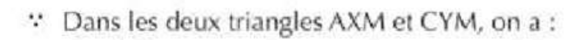
Conclusion : Démontre que M X = M Y.

Construction: On trace $\overline{MA}$, $\overline{MC}$.

Démonstration : ∵ $\overline{MX} \perp \overline{AB}$ ∴ $AX = \frac{1}{2} AB$.

∵ $\overline{MY} \perp \overline{CD}$ ∴ $CY = \frac{1}{2} CD$.

∵ A B = C D ∴ A X = C Y.



∵ Dans les deux triangles AXM et CYM, on a :

$$\begin{cases} AM = CM \\ m(\angle AXM) = m(\angle CYM) = 90^\circ \\ AX = CY \quad \text{(démontré)} \end{cases}$$





∴ Δ A X M ≡ Δ C Y M d'où : M X = M Y **(Ce qu'il fallait démontrer)**



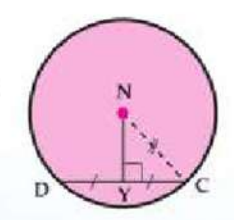
Corollaire

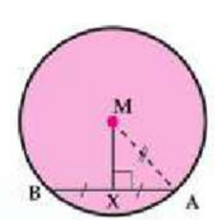
Dans les cercles superposables, les cordes ayant la même longueur sont équidistantes de leurs centres

Dans la figure ci-contre :

Les deux cercles M et N sont superposables, AB = CD,

$\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{NY} \perp \overline{CD}$. Démontre que M X = N Y.







Pour t'entraîner :

Observe chaque figure puis complète :

A *Si :*

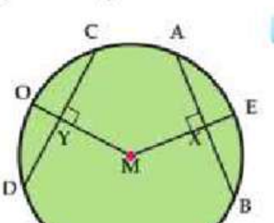
A B = C D,

alors :

M X =.........

∵ M E =.........

∴ E X =.........



B *Si :*

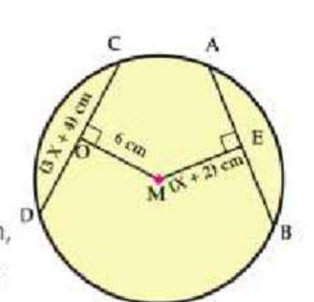
A B = C D,

alors :

M E =.........

∴ X =......... cm,

C D =......... cm



C *Si :*

AB = CD,

alors :

M X =.........

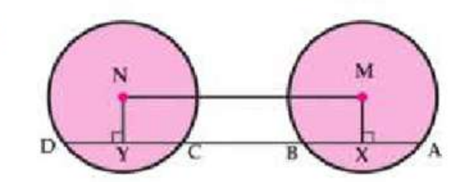
Dans Δ M XY:

∵ m(∠ X MY) = 100°

∴ m(∠ M XY) =.........°



D



Si : M et N sont deux cercles superposables et AB = CD,

alors : MX = ...

et la figure MXYN ....



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes de même longueur dans un cercle M, X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overrightarrow{MX}$ coupe le cercle en D. $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ qui le coupe en Y et qui coupe le cercle en E.

Démontre que : [1]: X D = Y E.

[2]: m (∠ Y X B) = m (∠ XY C)

Hypothèses : A B = A C, X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$

Conclusion : Démontre que :

[1]: X D = Y E [2]: m (∠ Y X B) = m (∠ XY C)

Démonstration : ∵ X est le milieu de $\overline{AB}$ ∴ $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$.

∵ A B = A C, $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ ∴ M X = MY

∵ M D = M E = r

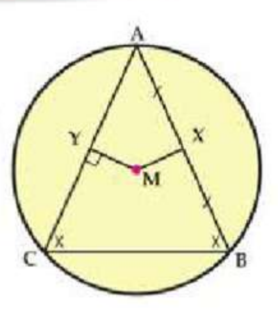
∴ M D - M X = M E - MY ∴ X D = Y E **(Ce qu'il fallait démontrer en 1)**

Dans le Δ M XY ∵ M X = MY ∴ m (∠ Y X M) = m (∠ XY M) (1)

∵ $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ ∴ m (∠ M X B) = m (∠ MY C) = 90° (2)

De (1) et (2) on a m (∠ Y X B) = m (∠ XY C) **(Ce qu'il fallait démontrer en 2)**

Pour t'entraîner :



Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle inscrit dans un cercle M tel que :

m ($\angle$ B) = m ($\angle$ C), X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{AC}$.

Démontre que : M X = MY

Réciproque du théorème

Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les cordes équidistantes du centre sont de même longueur.



Observe chaque figure, puis complète :



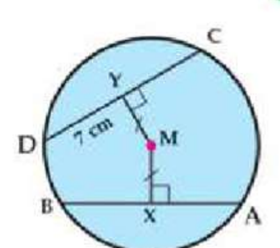
Si :

M X = MY et

Y D = 7 cm,

alors :

A B = ... cm



2

Si :

M E = M F,

alors :

C D = ...

∴ X = ...,

E M = ... cm , A M = ... cm



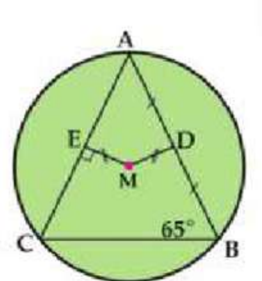
Si :

M D = M E et

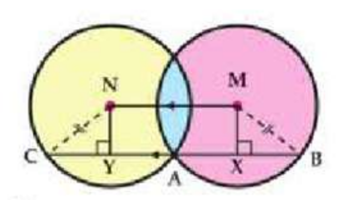
m ($\angle$ B) = 65°,

alors :

m ($\angle$ A) = ...°



4



∵ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ∴ M X = ...

∵ Les deux cercles M et N ....,

A ∈ $\overline{BC}$ ∴ A B = ...

Examples

2 Soient deux cercles concentriques de centre M, $\overline{AB}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en C et D. $\overline{AE}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en Z et L

Si m(∠ABE) = m(∠AEB), ***démontre que :*** CD = ZL.

Solution

Hypothèses : m (∠ A B E) = m (∠ A E B)

Conclusion : Démontrer que C D = Z L

Construction: On trace $\overline{MX} \perp \overline{AB}$ et $\overline{MY} \perp \overline{AE}$

Démonstration : Dans le triangle ABC : ∵ m(∠ A B E) =m (∠ A E B) ∴ A B = A E.

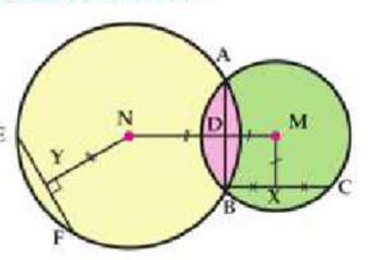
Dans le grand cercle, AB = AE. (démontré) ∴ MX = MY (théorème)

∵ Dans le petit cercle MX = MY: (démontré)

∴ CD = ZL ((réciproque du théorème)) **(Ce qu'il fallait démontrer)**

3 **Dans la figure ci-contre :** les deux cercle M et N sont sécants en A et B, $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = {D}, X est le milieu de $\overline{BC}$, $\overline{NY} \perp \overline{EF}$,

M X = M D, NY = N D. ***Démontre que :*** B C = E F.



Solution

Hypothèses : X est le milieu de $\overline{BC}$, $\overline{NY} \perp \overline{EF}$, MX = MD et NY = ND.

Conclusion : Démontre que BC = EF.

Démonstration : ∵ $\overleftrightarrow{MN}$ est la droite des centres des cercles et $\overline{AB}$ est une corde commune de deux cercles M et N.

∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

Dans le cercle M: ∵ X est le milieu de $\overline{BC}$ ∴ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$

∵ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$, $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, MX = MD

∴ BC = AB (réciproque du théorème) **(1)**

Dans le cercle N : ∵ $\overline{NY} \perp \overline{EF}$, $\overline{ND} \perp \overline{AB}$ et NY = ND

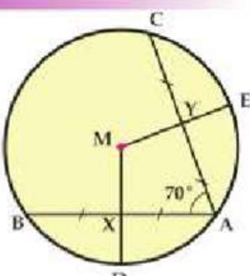
∴ EF= AB (réciproque du théorème) **(2)**

De (1) et (2), on a : BC = EF

Réfléchis: Soient M et N deux cercles superposables et sécants en A et B. La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est-elle la médiatrice de $\overline{MN}$?




Exercices (4-4)



1 **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle M, X est le milieu de $\overline{AB}$, Y est le milieu de $\overline{AC}$ et m ($\angle$ C A B) = 70°.

A ***Calcule*** m ($\angle$ DME). **B** ***Démontre que :*** X D = Y E.

2 $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle M, X et Y sont les milieux de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, respectivement et m ($\angle$ M XY) = 30° Démontre que :

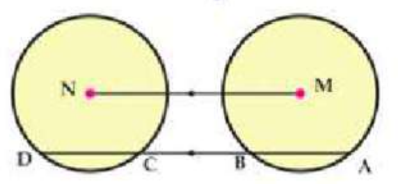
[1]: le triangle MXY est isocèle. **[2]:** le triangle AXY est équilatéral.

3 $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes dans le cercle M, $\overline{MX} \perp \overline{AB}$, Y est le milieu de $\overline{AC}$, m ($\angle$ ABC) = 75°, M X = MY.

A ***Trouve*** m ($\angle$ B A C).

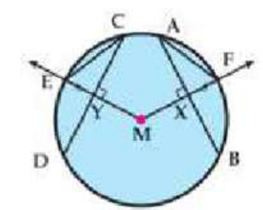
B ***Démontre que :*** le périmètre du Δ AXY = $\frac{1}{2}$ le périmètre du Δ ABC.

4 Soient deux cercles concentriques de centre M. $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le grand cercle, tangents au petit cercle en X et Y respectivement. ***Démontre que*** AB = AC



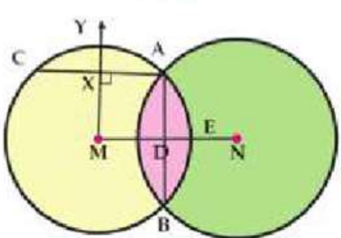
5 **Dans la figure ci-contre :** M et N sont deux cercles superposables. On trace $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{MN}$ qui coupe le cercle M en A et B et le cercle N en C et D.

Démontre que : AC = BD.



6 $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le cercle M, $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$ qui coupe le cercle en F, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{CD}$ qui coupe le cercle en E et FX = EY.

Démontre que : **[1] :** AB = CD **[2] :** AF = CE.



7 **Dans la figure ci-contre :** M et N sont deux cercles sécants en A et B $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AC}$ qui coupe $\overline{AC}$ en X et qui coupe le cercle M en Y. On trace , $\overline{MN}$ qui coupe $\overline{AB}$ en D et le cercle M en E. Si AC = AB, ***démontre que :*** XY = DE.

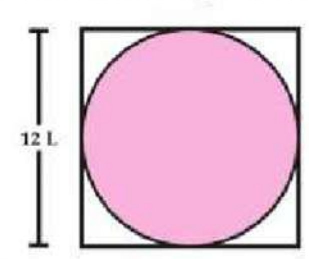
8 M et N sont deux cercles tangents intérieurement en A. On trace deux cordes de même longueur, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ dans le grand cercle qui coupe le petit cercle en D et E respectivement. ***Démontre que :*** AD = AE.

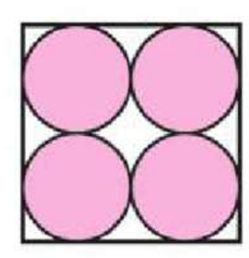


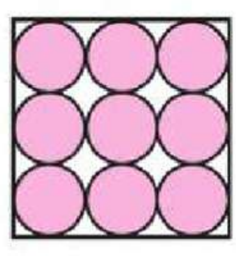
Motifs géométriques



1 Une boulangerie produit des pâtisseries de formes circulaires, puis elle les pose dans des boîtes carrées de longueur de côté 12L cm selon le motif suivant.







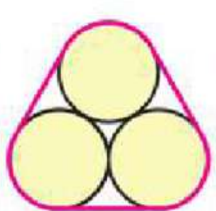
A Calcule l'aire de la surface prise par les pâtisseries dans chaque boîte.

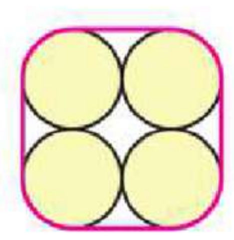
B Quelle est l'aire de la surface prise par les pâtisseries dans la quatrième boîte et dans la dixième boîte dans ce motif ?

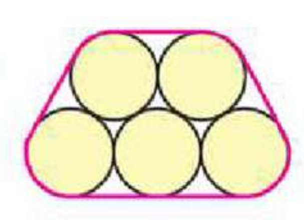
C Sachant que toutes les pâtisseries sont d'une même sorte et d'une même hauteur, les prix des boîtes sont-ils égaux ou différents ? Justifie ta réponse.

2 Une usine produit des pots de confiture de formes cylindriques de longueur de rayon de base r cm. On regroupe les pots et on les couvre avec un emballage en plastique, puis on les entoure d'un ruban de papier comme le montre le motif suivant :

Nombre de boîtes → 1 2 3 4



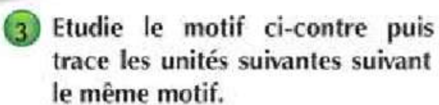




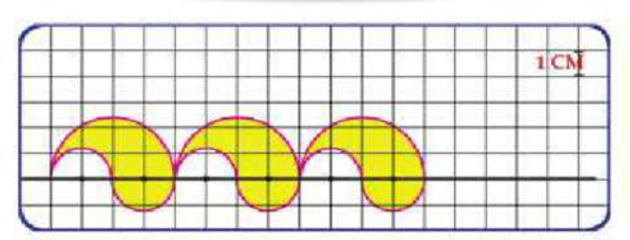
A Quel est la longueur du ruban dans chaque cas ? Existe-t-il une relation entre le nombre de pots et la longueur du ruban ?

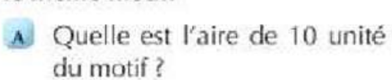
B Quelle est la longueur du ruban qui entoure 6 pots ?

C Quelle est la longueur du ruban qui entoure 7 pots ? Discute les différentes positions pour placer les pots les uns à côté des autres. Déduis la condition qui permet de calculer la longueur de ruban suivant la même règle.



3 **Etudie le motif ci-contre puis trace les unités suivantes suivant le même motif.**

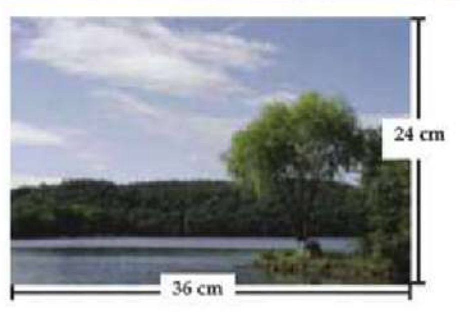




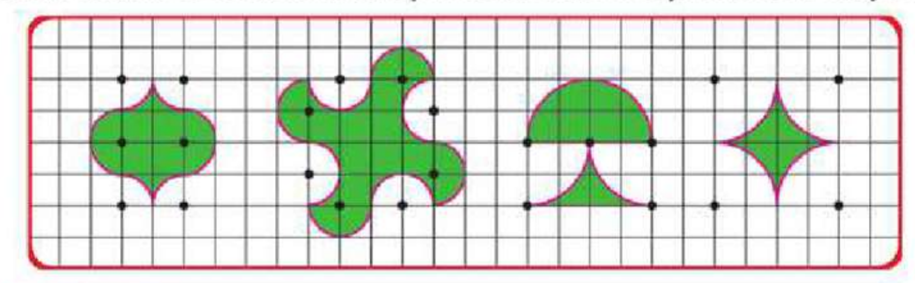
A Quelle est l'aire de 10 unité du motif ?

B Quel est le périmètre de 7 unités de ce motif ?

C Quel est le nombre d'unités qu'on peut utiliser pour faire un cadre autour d'une image rectangulaire de dimensions 24 cm et 36 cm ?



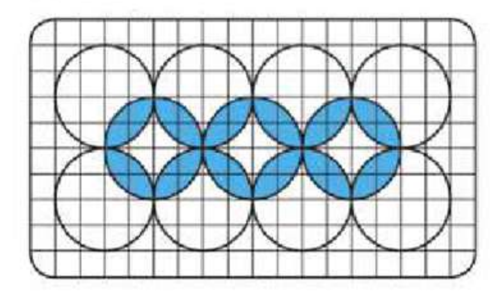
4 **Etudie chacune des unités suivantes puis trouve l'aire et le périmètre de chaque unité .**

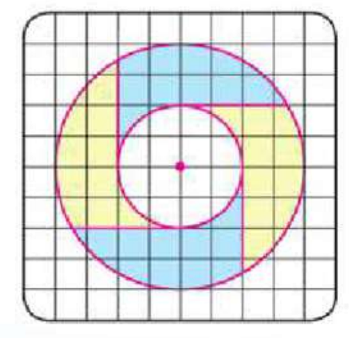


5 Technologie : **Utilise les programmes de l'ordinateur pour dessiner les motifs artistiques suivants.**

A des cercles superposables, tangents et sécants.

B des cercles concentriques des tangentes.





Produis d'autres motifs et utilise-les dans ton cours de dessin.



Exercices généraux



1 Complète pour obtenir des phrases correctes :

A Une corde d'un cercle est le segment joignant ....

B La droite passant par le centre d'un cercle et perpendiculaire à une corde ....

C La droite des centres de deux cercles tangents intérieurement passe ....

D Le centre du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection de ....

E Dans un cercle, les cordes ayant la même longueur sont ....

2 Choisis la bonne réponse parmi les réponses données :

A Dans un cercle de 6 cm de longueur de diamètre, toute tangente au cercle est distante de .... de son centre. (6 **ou** 12 **ou** 3 **ou** 2)

B On peut tracer un cercle passant par les sommets d'un ....

(losange **ou** rectangle **ou** trapèze **ou** parallélogramme)

C Si AB est un diamètre d'un cercle M et si $\overleftrightarrow{AC}$ et $\overleftrightarrow{BD}$ sont deux tangentes au cercle, alors $\overleftrightarrow{AC}$ .... $\overleftrightarrow{BD}$.

(coupe **ou** parallèle à **ou** perpendiculaire à **ou** superpose à)

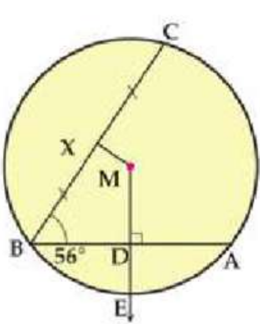
D Si un cercle a pour périmètre 6π cm et droite L est distante de 3 cm du centre du cercle, alors la droite L est ....
(une tangente au cercle **ou** une sécante au cercle **ou** extérieure au cercle **ou** un diamètre du cercle)

E Si M et N sont deux cercles sécants de rayons respectifs 3cm et 5 cm, alors MN $\in$ ....

($]8, \infty[$ **ou** $]2, \infty[$ **ou** $]0, 2[$ **ou** $]2, 8[$)

3 Dans la figure ci-contre : $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont deux cordes dans le cercle M ayant pour longueur de rayon 5 cm., $\overrightarrow{MD} \perp \overline{AB}$ qui le coupe en D et qui coupe le cercle M en E. X est le,milieu de $\overline{BC}$. AB = 8 cm, m ($\angle$ABC) = 56°

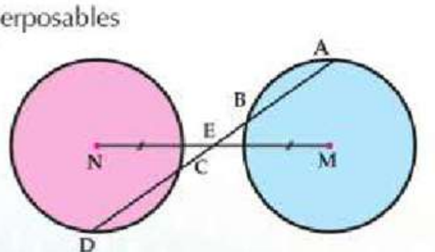
Trouve : **A** m ($\angle$ D M X) **B** la longueur de $\overline{DE}$



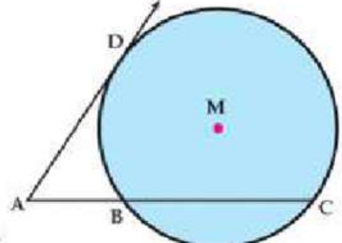
4 Dans la figure ci-contre : M et N sont deux cercles superposables et disjoints. E est le milieu de $\overline{MN}$. On trace $\overleftrightarrow{AE}$ qui coupe le cercle M en A et B et le cercle N en C et D.

Démontre que : **A** A B = C D.

B E est le milieu de $\overline{AD}$.



5 **Dans la figure ci-contre :**

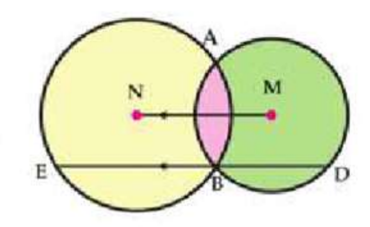


M est un cercle de 5 cm de longueur de rayon, A est un point extérieur au cercle, $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle M en D, $\overrightarrow{AB}$ coupe le cercle en B et C respectivement où AB = 4 cm et AC = 12 cm.

A Trouve la distance de la corde $\overline{BC}$ au centre du cercle

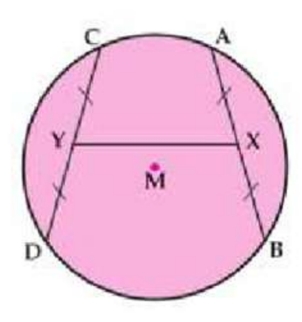
B Calcule la longueur de $\overline{AD}$.

6 **Dans la figure ci-contre :**



M et N sont deux cercles sécants en A et B. On trace $\overleftrightarrow{BD}$ // $\overleftrightarrow{MN}$ qui coupe les deux cercles en D et E respectivement. Démontre que : DE = 2 MN

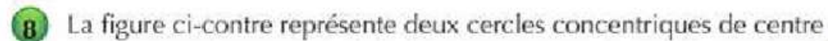
7 **Dans la figure ci-contre :**

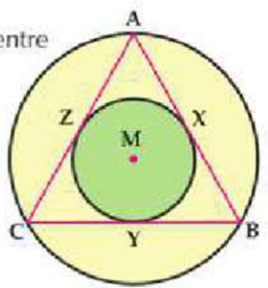


$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle M . X et Y sont les milieux respectifs de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ où B et D sont d'un même côté par rapport à $\overleftrightarrow{XY}$.

Démontre que : m (∠ B XY) = m(∠ DY X).

Réfléchis : Est-ce que $\overline{AC}$ // BD ? Justifie ta réponse

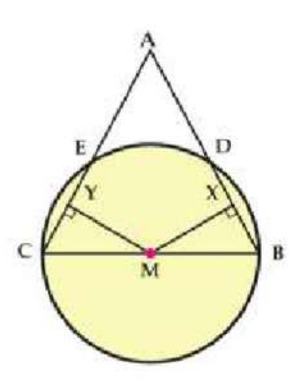
8 
La figure ci-contre représente deux cercles concentriques de centre M et de longueurs de rayons 4 cm et 2 cm. ABC est un triangle inscrit dans le grand cercle et dont les côtés sont tangents au petit cercle en X, Y et Z.



Démontre que : le triangle ABC est équilatéral, puis calcule son aire.

9 **Dans la figure ci-contre :**

ABC est un triangle tel que AB = AC. On trace un cercle de diamètre $\overline{BC}$ qui coupe $\overline{AB}$ en D et $\overline{AC}$ en E, $\overline{MX} \perp \overline{BD}$ et $\overline{MY} \perp \overline{CE}$.



Démontre que : BD = CE.



Epreuve de l'unité



1 **Complète pour obtenir des phrases correctes :**

A. Par trois points n'appartenant pas à une même droite passe ....

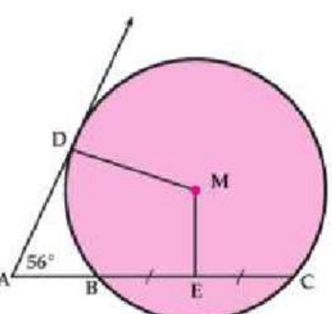
B. L'axe de symétrie de deux cercles M et N sécants en A et B est ....

C. Si AB = 7 cm, alors l'aire du plus petit cercle passant par A et B = ... cm^2.

D. Si M est un cercle de périmètre 8π cm et A est un point du cercle, alors MA = ...

E. Dans un cercle de longueur de rayon 5 cm, si une corde a pour longueur 8 cm, alors sa distance du centre du cercle est .... cm.

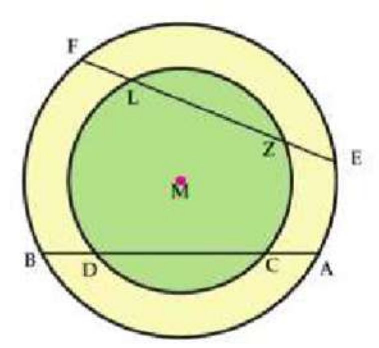
2 **Dans la figure ci-contre :**



$\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle M, $\overrightarrow{AC}$ coupe le cercle M en B et C, E est le milieu de $\overline{BC}$ et m (∠ A) = 56°.

Trouve m (∠ D M E).

3 La figure ci-contre représente deux cercles concentriques de centre M , $\overline{AB}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en C et D. $\overline{EF}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en Z et L où AB = EF

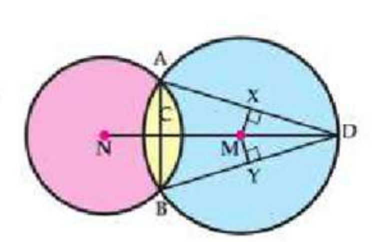


Démontre que :

A. C D = Z L.

B. A D = Z F.

4 **Dans la figure ci-contre :**



Le cercle M ∩ Le cercle N = {A,B}, $\overleftrightarrow{AB}$ ∩ $\overleftrightarrow{MN}$ = {C}, D ∈ $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{MX}$ ⊥ $\overline{AD}$ et $\overline{MY}$ ⊥ $\overline{BD}$.

Démontre que : M X = MY.


Géométrie
Unité 5:
Les angles et les arcs dans le cercle



Angle au centre et mesure de l'arc



A apprendre :

- ☆ La notion de la longueur d'un arc.
- ☆ La notion de la mesure d'un arc.
- ☆ Comment trouver la relation entre les cordes d'un cercle et ses arcs.

Expressions de base

- ☆ Angle au centre
- ☆ Angle inscrit
- ☆ Arc
- ☆ Deux arcs adjacents
- ☆ Mesure d'un arc
- ☆ Une corde
- ☆ Une tangente

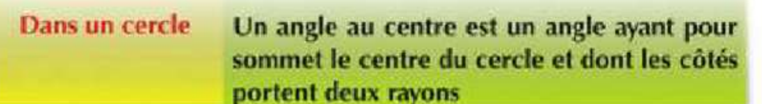
Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre:

Les deux côtés de l'angle ∠ AMB partagent le cercle en deux arcs:

1. Le petit arc AB qu'on notera $\overset{\frown}{AB}$.
2. Le grand arc ACB qu'on notera $\overset{\frown}{ACB}$.

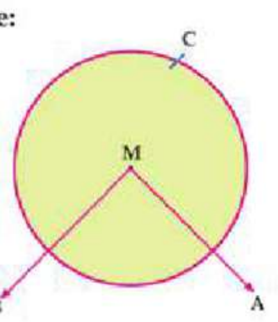
- ♦ Quelles sont les positions des points de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à l'angle ∠ AMB ?
- ♦ Quelles sont les positions des points de l'arc $\overset{\frown}{ACB}$ par rapport à l'angle rentrant ∠ AMB ?
- ♦ Si ∠ AMB est un angle plat, **que remarqueras-tu?**



Dans un cercle **Un angle au centre est un angle ayant pour sommet le centre du cercle et dont les côtés portent deux rayons**



Dans la figure ci-contre, on remarque que:



1. ∠AMB est un angle au centre qui intercepte $\overset{\frown}{AB}$ tandis que l'angle au centre rentrant ∠ AMB intercepte $\overset{\frown}{ACB}$.
2. Si l'angle ∠ AMB est un angle plat, ($\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M), alors $\overset{\frown}{AB}$ superpose $\overset{\frown}{ACB}$ à l'arc ACB et dans ce cas chacun des deux arcs est appelé «un demi cercle».



La mesure d'un arc **d'un cercle est la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.**

Dans la figure ci-contre:

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, $\overline{MC} \perp \overline{AB}$ et m (∠ AMD) = 60°

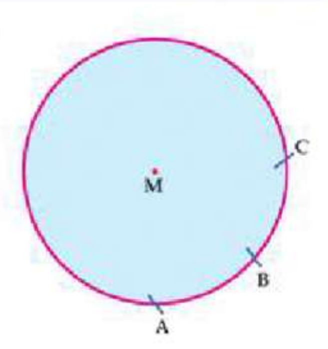
On remarque que :

1. m $\widehat{AD}$ = m (∠ AMD) = 60°
2. m $\widehat{CB}$ = m (∠ CMB) = 90°
3. m $(\widehat{DC})$ = m (∠ DMC) = 30° *(Pourquoi ?)*
4. m $\widehat{AB}$ = m (∠ AMB) = 180°

D'où La mesure d'un demi cercle = 180° et la mesure d'un cercle = 360°

Deux arcs adjacents	**sont deux arcs ayant un et un seul point en commun.**

La figure ci-contre, montre les deux arcs adjacents $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$:



Dans ce cas :

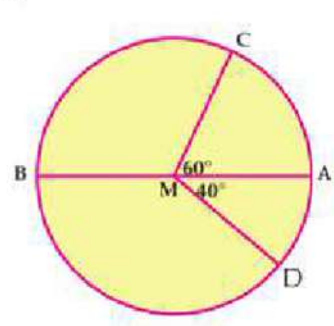
m $(\widehat{AB})$ + m $(\widehat{BC})$ = m $(\widehat{ABC})$

, m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{ABC})$ - m $(\widehat{BC})$



Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, m (∠ AMC) = 60°, m (∠ AMD)= 40° .

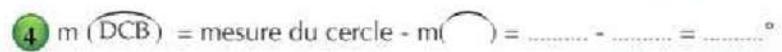


Complète :

1. m $(\widehat{AD})$ = ...° et m $(\widehat{AC})$ = ...°
2. m $(\widehat{CAD})$ = m $(\widehat{CA})$+ ....

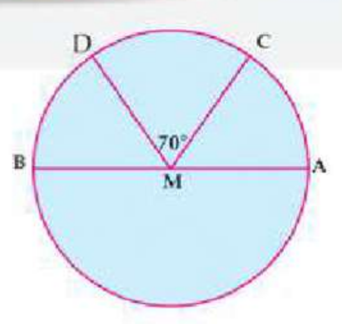
   = ... + ... = ...°
3. m $(\widehat{BC})$ = m $(\widehat{ACB})$ - m (   ) = 180° - .... = ...°

   (Pourquoi ?)



4. m $(\widehat{DCB})$ = mesure du cercle - m$(\frown)$ = ... - .... = ...°

Exemple (1)



Dans la figure ci-contre, m $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, ($\angle$ CMD) = 70° et m $(\widehat{AC})$: m $(\widehat{DB})$ = 5 : 6, ***trouve*** m $(\widehat{ACD})$.

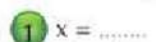
Solution

Soit m $(\widehat{AC}) = 5x$ $\therefore$ m $(\widehat{DB}) = 6x$

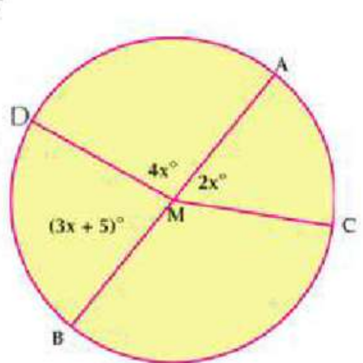
$\because$ m $(\widehat{ADB})$ = m $(\widehat{AC})$ + m $(\widehat{CD})$ + m $(\widehat{DB})$ = 180°

$\therefore$ $5x + 70° + 6x = 180°$ $11x = 110°$ $\therefore$ $x = 10°$, m $(\widehat{AC}) = 50°$

$\therefore$ m $(\widehat{ACD})$ = m $(\widehat{AC})$ + m $(\widehat{CD})$ = 50° + 70° = 120°



Pour t'entrainer :



Dans la figure ci-contre: $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M.

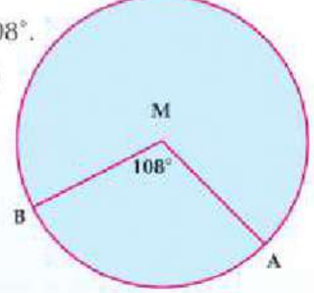
Obseve la figure puis complète:

1. x = ...
2. m $(\widehat{AC})$ = ...°
3. m $(\widehat{AD})$ = ...
4. m $(\widehat{BC})$ = ...°
5. m $(\widehat{CAD})$ = ...
6. m $(\widehat{CBD})$ = ...
7. m $(\widehat{ACD})$ = ...
8. m $(\widehat{ADC})$ = ...

La longueur d'un arc	**d'un cercle est une partie du périmètre du cercle qui est proportionnelle à la mesure de l'arc lui-même où** **Longueur de l'arc = $\frac{\text{Mesure de l'arc}}{\text{Mesure du cercle}}$ × périmètre du cercle**



Exemple (2)



Dans la figure ci-contre :

M est un cercle de 5 cm de longueur de rayon et m $(\widehat{AB})$ = 108°.

Trouve: la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ (prendre π = 3,14)

Solution

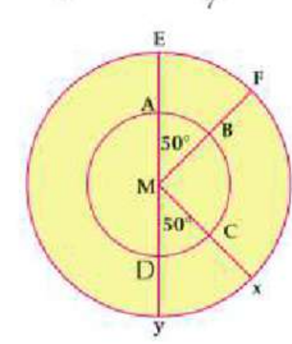
Longueur de l'arc = $\frac{\text{Mesure de l'arc}}{\text{Mesure du cercle}}$ × périmètre du cercle

$= \frac{108}{360} \times 2 \times 3{,}14 \times 5 = 9{,}42$cm.





Dans la figure ci-contre: les deux cercles sont concentriques, la longueur du rayon du petit cercle est 7 cm et la longueur du rayon du grand cercle est 14 cm (prendre $\pi = \frac{22}{7}$)



Complète : Dans le petit cercle:

m $(\widehat{AB})$ = m ($\widehat{.....}$) = ...°

La longueur de $\widehat{AB} = \frac{50}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times .... = ...$ cm

La longueur de $\widehat{CD}$ = ... × .... = ...cm

∴ $\widehat{AB}$ **(superpose à / ne superpose pas à)** $\widehat{CD}$

Dans le grand cercle:

m $(\widehat{EF})$ = m ($\widehat{.......}$) = ...° et la longueur de $\widehat{EF}$ = ... × .... = ... cm

La longueur de $\widehat{XY}$ = ... × .... = ...cm

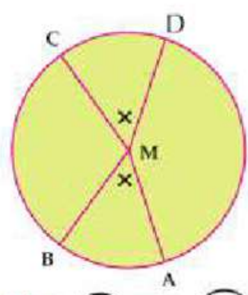

∴ $\widehat{EF}$ **(superpose à / ne superpose pas à)** $\widehat{XY}$

Est-ce que $\widehat{AB}$ superpose à $\widehat{EF}$? Que peux-tu déduire?

Résultats importants:



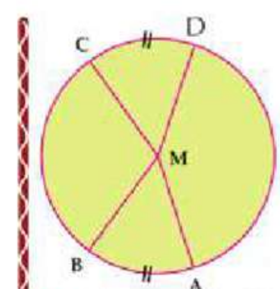
Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les arcs de mesure ont même longueur et réciproquement



Dans le cercle M

Si: m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{CD})$

alors: la longueur de $\widehat{AB}$ = la longueur de $\widehat{CD}$



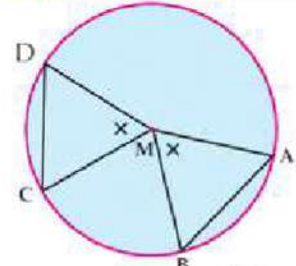
Réciproquement

Si : la longueur de $\widehat{AB}$ = la longueur de $\widehat{CD}$

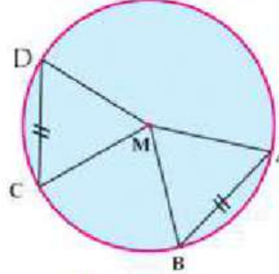
alors : m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{CD})$



Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les arcs de mesure sous-tendent des cordes de même longueur et réciproquement.



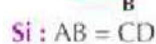
Dans le cercle M



Réciproquement

Si: m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$

alors : la longueur de $\overline{AB}$= la longueur de $\overline{CD}$

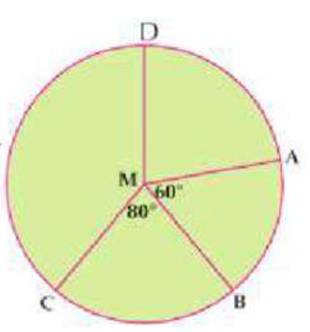


alors : m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$



Dans la figure ci-contre:

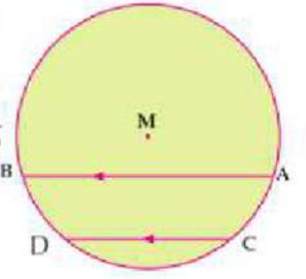
m $(\overset{\frown}{AB})$ = 60° et m $(\overset{\frown}{BC})$ = 80° , m $(\overset{\frown}{AD})$: m $(\overset{\frown}{DC})$ = 4 : 7



1. Cite les arcs ayant la même mesure.
2. Cite les arcs ayant la même longueur.
3. Trace les cordes ayant la même longueur.



Dans un cercle, les arcs compris entre deux cordes parallèles ont même mesure



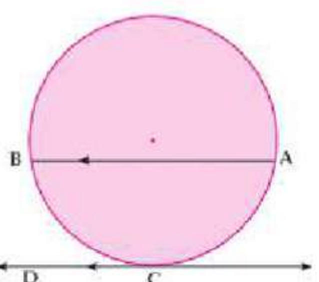
Si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le cercle M, telles que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

alors m $(\overset{\frown}{AC})$ = m $(\overset{\frown}{BD})$.

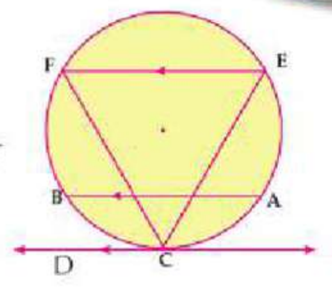


Dans un cercle, les arcs compris entre une corde et une tangente qui lui est parallèle ont même mesure

Si $\overline{AB}$ est une corde dans le cercle M et $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente telles que $\overline{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ **alors** m $(\overset{\frown}{AC})$ = m $(\overset{\frown}{BD})$.







Dans la figure ci-contre :

M est un cercle, $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle en C , $\overline{AB}$ et $\overline{EF}$ sont deux cordes du cercle telles que $\overline{AB} // \overline{EF} // \overleftrightarrow{CD}$

Complète ce qui suit pour démontrer que CE = CF

Solution

$\because \overline{AB} // \overline{EF}$ $\therefore$ m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ (1)

$\because$ La tangente $\overleftrightarrow{CD} // \overline{AB}$ $\therefore$ m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ (2)

De (1) et (2):

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{EC})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ $\therefore$ CE = ………

Exemple (3)

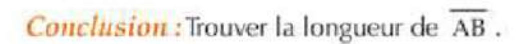
Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle tel que AC = BD, AB = (3x - 5) cm et CD = (x + 3) cm.

Trouve la longueur de $\overline{AB}$ en justifiant ta réponse.



Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle, AC = BD , AB = (3x - 5) cm et CD= (X + 3) cm


Conclusion : Trouver la longueur de $\overline{AB}$.

Démonstration : $\because$ AC = BD Hypothèse $\therefore$ m $(\overset{\frown}{ABC})$ = m $(\overset{\frown}{BCD})$

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{ABC})$ - m $(\overset{\frown}{BC})$ = m $(\overset{\frown}{BCD})$ - m $(\overset{\frown}{BC})$

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{DC})$ $\therefore$ AB = CD

$\because$ AB = CD $\therefore$ 3x - 5 = x + 3

2x = 8 $\therefore$ x = 4

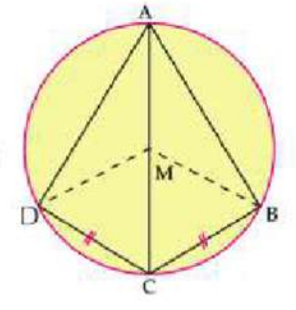
$\because$ AB = 3x - 5 $\therefore$ AB = 3 × 4 - 5 = 7cm



Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle, $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle et CB = CD.

Démontre que m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{AD})$



Solution

Hypothèses: $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle et CB = CD

Conclusion : m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{AD})$

Démonstration : ∵ CB = CD hypothèse ∴ m $(\widehat{CB})$ = m $(\widehat{CD})$ (1)

∵ $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle

∴ m $(\widehat{AB})$ = 180°- m $(\widehat{CB})$, m $(\widehat{AD})$ = 180°- m $(\widehat{CD})$ (2)



De (1) et (2) on a m $(\widehat{AB})$ = m $(\widehat{AD})$

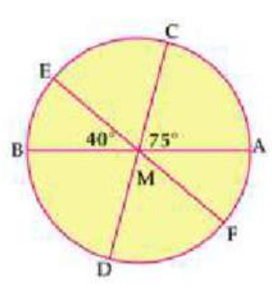


1 Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ et $\overline{EF}$ sont trois cordes d'un cercle M *Complète :*

A m $(\widehat{AC})$ = ... B m $(\widehat{ACE})$ = ...

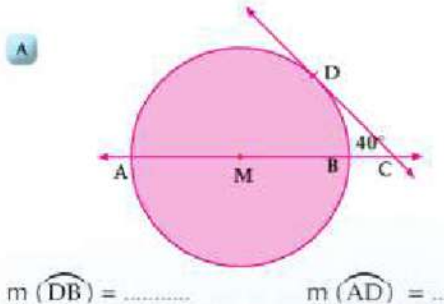
C m $(\widehat{ACD})$ = ... D m $(\widehat{AFE})$ = ...



2 Dans chacune des figures suivantes:

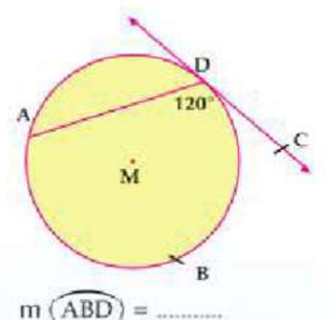
$\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle M en D *Complète:*





m $(\widehat{DB})$ = ... m $(\widehat{AD})$ = ...





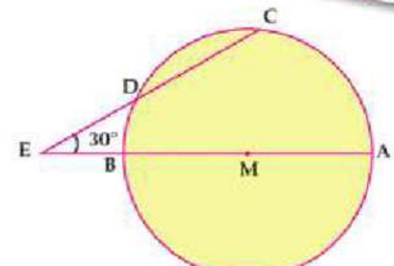
m $(\widehat{ABD})$ = ...

3 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$,

$m(\angle AEC) = 30°$ et $m(\widehat{AC}) = 80°$.

Trouve: $m(\widehat{CD})$

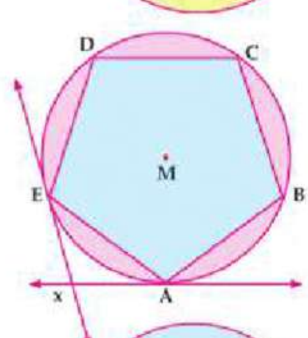


4 **Dans la figure ci-contre :**

ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle M, $\overleftrightarrow{AX}$ est une tangente au cercle en A et $\overleftrightarrow{EF}$ est une tangente au cercle en E telles que $\overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{EX} = \{X\}$.

Trouve: **A** $m(\widehat{AE})$

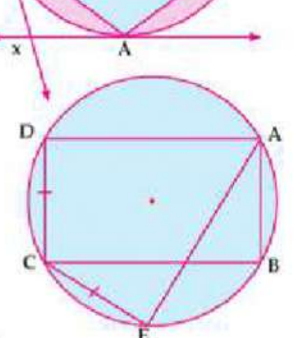
B $m(\angle AXE)$.



5 **Dans la figure ci-contre :**

ABCD est un rectangle inscrit dans le cercle M. On trace la corde $\overline{CE}$ telle que CE = CD .

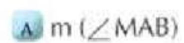
Démontre que : AE = BC .

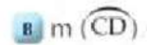


6 **Dans la figure ci-contre :**

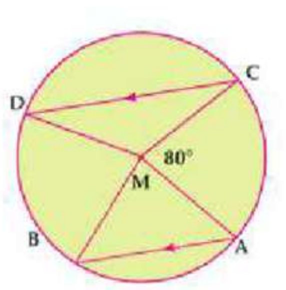
M est un cercle de 15 cm de longueur de rayon. $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes parallèles dans le cercle, $m(\widehat{AC}) = 80°$, et la longueur de $\widehat{AC}$ = la longueur de $\widehat{AB}$.

Trouve:


A $m(\angle MAB)$


B $m(\widehat{CD})$

C La longueur de $\widehat{CD}$

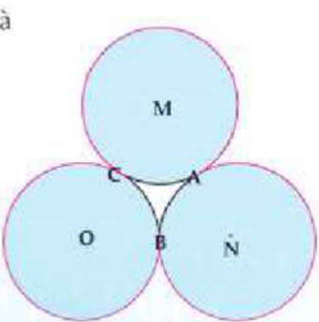


7 **Dans la figure ci-contre :**

M, N et O sont trois cercles superposables, tangents deux à deux en A, B et C et de rayon 10 cm

A **Démontre que :** la longueur de $\widehat{AB}$ = la longueur de $\widehat{BC}$ = la longueur de $\widehat{AC}$.

B Calcule le périmètre du triangle ABC .





Relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc



A apprendre:

☆ Comment déduire la relation entre un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc.

Expressions de base

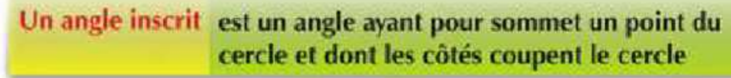
☆ Angle au centre
☆ Angle inscrit

Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre :

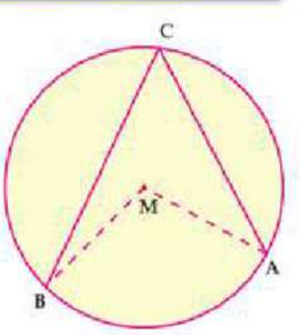
le cercle M passe par les sommets du triangle équilatéral ABC.

- Quelle est la mesure de l'angle au centre ∠ BMC? **Justifie ta réponse.**
- Quel est le sommet de ∠ BAC?
  Est-ce que ce sommet appartient à l'ensemble des points du cercle M ?
- Quels sont les côtés de ∠ BAC ?
- Si ∠ BMC est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$, commet peux-tu décrire ∠ BAC ?
- Compare m(∠ BAC) et m (∠ BMC). **Que remarques-tu ?**


Un angle inscrit est un angle ayant pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle

Dans la figure ci-contre, observe que :

1. ∠ ACB est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2. tout angle inscrit, il existe un seul angle au centre qui intercepte le même arc.

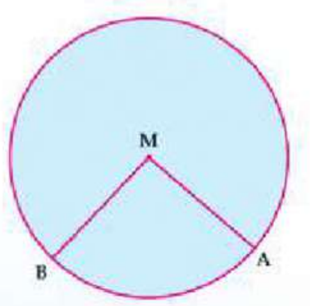




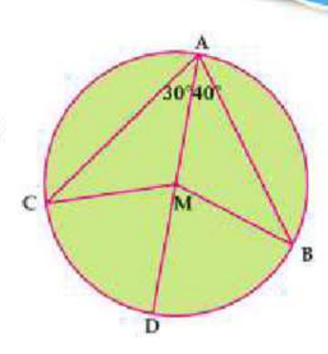
Dans la figure ci-contre:

Quel est le nombre d'angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre ∠ AMB?

(Explique ta réponse à l'aide du dessin)

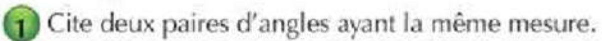


 **Dans la figure ci-contre :**



$\overline{AD}$ est un diamètre du cercle M. Observe la figure puis réponds aux questions suivantes:

1. Cite deux paires d'angles ayant la même mesure.
2. Si m (∠ BAD) = 40°, trouve m (∠ BMD) .
3. Si m (∠ CAD) = 30°, trouve m (∠ CMD) .
4. Compare m (∠ BAC) et m (∠ BMC). **Que peux-tu déduire?**



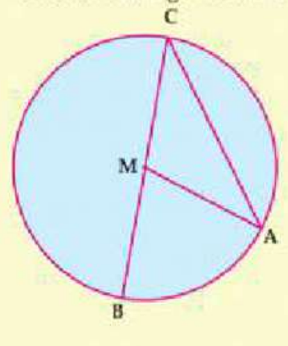
Théorème ***Dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre s'ils interceptent le même arc.***

Hypothèses: ∠ ACB et un angle inscrit et ∠ AMB et un angle au centre qui interceptent le même arc.

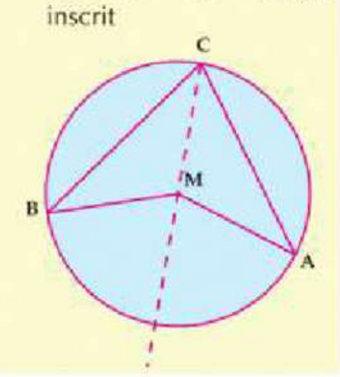
Conclusion : Démontrer que m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB).

Démonstration : **Pour démontrer le théorème, il y a trois cas à étudier .**

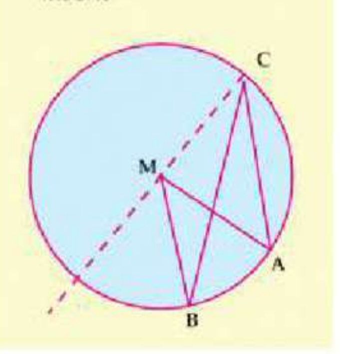
1. Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit.



2. Si M est un point à l'intérieur de l'angle inscrit



3. Si M est un point à l'extérieur de l'angle inscrit



Premier cas : Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit.

∵ ∠ AMB est un angle extérieur au triangle AMC

∴ m (∠ AMB) = m (∠ A) + m (∠ C) (1)

∵ AM = CM **(rayons)** ∴ m (∠ A) = m (∠ C) (2)



De (1) et (2) on déduit que m (∠ AMB = 2 m (∠ C)

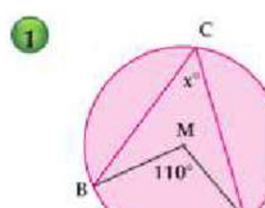
∴ m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB) ***(Ce qu'il fallait démontrer)***

Activité

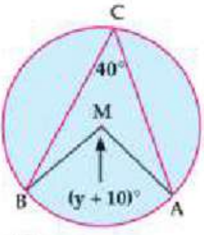
Démontre le théorème dans les deux autres cas puis garde le résultat dans ton portfolio.



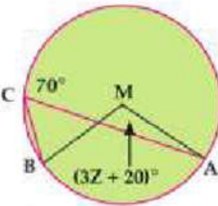
Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle. Trouve la valeur du symbole utilisé comme mesure d'angle :

1


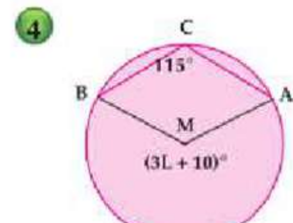
X = ...

2


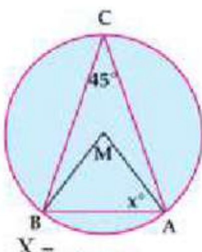
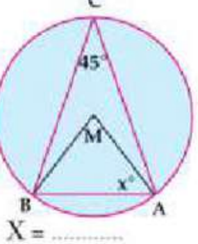
Y = ...

3


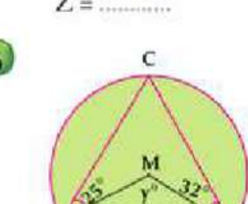
Z = ...

4


L = ...

5



X = ...

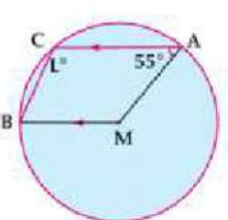
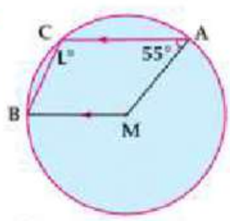
6


Y = ...

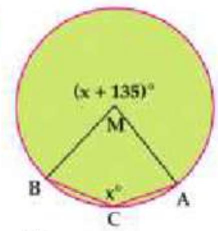
7

D
(Z - 15)°
C
M
85°
B
A

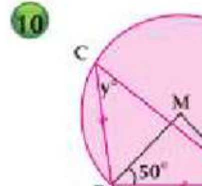
Z = ...

8



L = ...

9


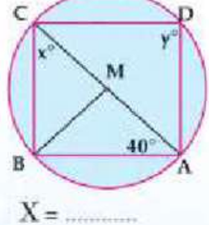
X = ...

10


Y = ...

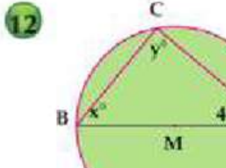
Z = ...



11


X = ...

Y = ...

12


X = ...

Y = ...



Exemple (1)

A est un point à l'extérieur d'un cercle M, $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B, $\overrightarrow{AM}$ coupe le cercle M en C et D respectivement et m(∠A) = 40°. ***Trouve*** m(∠BDC) en justifiant ta réponse.

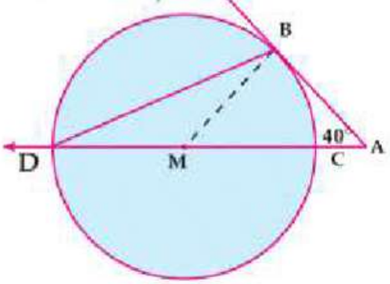
Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B, m(∠A) = 40° , $\overrightarrow{AM}$ coupe le cercle M en C et D.

Conclusion : m (∠BDC)

Construction: On trace le rayon $\overline{BM}$.

Démonstration : ∵ $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B et $\overline{BM}$ est un rayon.



∴ m (∠ ABM) = 90°

Dans Δ ABM :

∵ m (∠A) = 40° , m(∠ABM) = 90°

∴ m (∠BMC) = 180° - (40° + 90°) = 50°

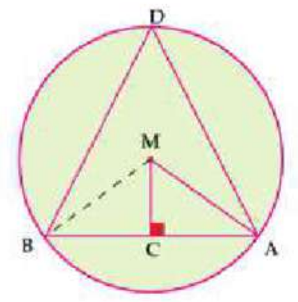
∵ ∠BDC est inscrit et ∠BMC est un angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

∴ m (∠BDC) = $\frac{1}{2}$ m (∠BMC)

∴ m (∠BDC) = $\frac{1}{2}$ × 50 = 25 °   ***(Ce qu'il fallait démontrer)***

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre, $\overline{AB}$ est une corde du cercle M, $\overline{MC} \perp \overline{AB}$.



Démontre que: m (∠AMC) = m (∠ADB)

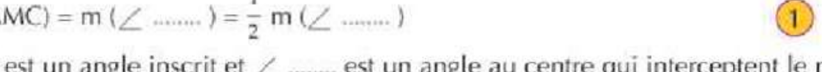


Solution

On trace $\overline{BM}$, ***Complète :*** Dans le Δ MAB :

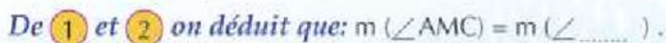
∵ MA= MB , $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

∴ m (∠ AMC) = m (∠ ....) = $\frac{1}{2}$ m (∠ ....)    (1)



∵ ∠ADB est un angle inscrit et ∠ .... est un angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{.......}$

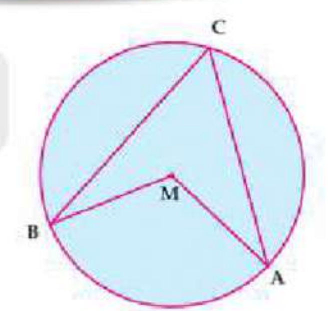
∴ m (∠ ....) = $\frac{1}{2}$ m (∠ ....)   (2)



De (1) et (2) on déduit que: m (∠AMC) = m (∠ ....) .



La mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc qui le sous-tend



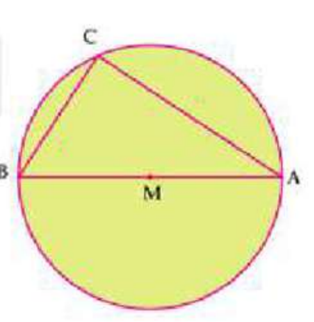
Dans la figure ci-contre :

$m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\angle AMB)$ et $m(\angle AMB) = \widehat{AB}$

$\therefore\ m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$



Un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est un angle droit.



Donc: l'arc qui sous-tend l'angle inscrit est égal à un demi-cercle,

alors **alors:** $m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$

$\because\ m(\widehat{AB}) = 180°$ $\qquad \therefore\ m(\angle C) = 90°$

Think 

- **Quelle est** `la nature d'un angle inscrit qui intercepte un arc plus petit qu'un demi-cercle ? Pourquoi?
- **Quelle est** la nature d'un angle inscrit qui intercepte un arc plus grand qu'un demi-cercle ? Pourquoi?
- **Est-ce qu'** un angle inscrit doit intercepter un arc égal à un demi cercle? **Justifie te réponse.**

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre: ABC est un triangle inscrit dans un cercle M, $m(\widehat{AB}) : m(\widehat{BC}) : m(\widehat{AC}) = 4 : 5 : 3$. ***Trouve*** $m(\angle ACB)$:

C, 5x°, 3x°, M, B, A, 4x°

Solution

Soient: $m(\widehat{AB}) = 4x°$, $m(\widehat{BC}) = 5x°$ et $m(\widehat{AC}) = 3x°$

$\therefore\ 4x + 5x + 3x = 360°$

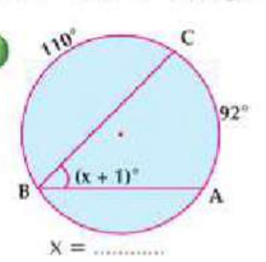
$12x = 360°$ $\qquad \therefore\ x = 30°$

$\therefore\ m(\widehat{AB}) = 4 \times 30° = 120°$ et l'arc AB sous-tend l'angle inscrit $\angle ACB$.

$\because\ m(\angle ACB) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$ $\therefore\ m(\angle ACB) = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ ***Ce qu'il fallait démontrer.***

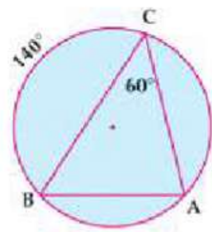
Pour t'entraîner :

Observe chacune des figures suivantes puis complète:

1


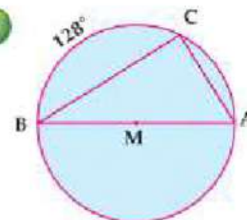
x = ...

m ($\overset{\frown}{AB}$) = ...

2


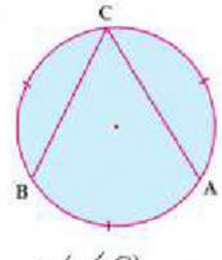
m (∠ A) = ...

m ($\overset{\frown}{AC}$) = ...

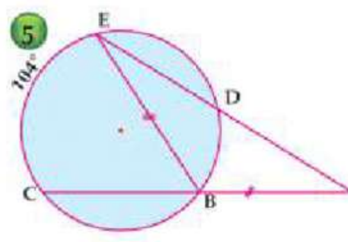
3


m (∠ C) = ...

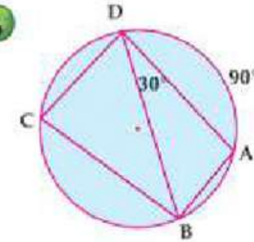
m (∠ B) = ...

4


m (∠ C) = ...

5


m (∠ EAC) = ...

m (∠ DCB) = ...

Exemple (3)

Problème type (1)

Si deux cordes se coupent à l'intérieur d'un cercle, la mesure de l'angle qu'elles forment entre elles est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par cet angle.

Solution

Hypothèses: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

Conclusion: m (∠AEC) = $\frac{1}{2}$ [m ($\overset{\frown}{AC}$) + m ($\overset{\frown}{BD}$)]

Construction: On trace $\overline{AD}$

Démonstration: ∵ ∠AEC est un angle extérieur au Δ AED .

∵ m (∠AEC) = m (∠D) + m (∠A) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{AC}$) + $\frac{1}{2}$ m($\overset{\frown}{BD}$)

= $\frac{1}{2}$ [m ($\overset{\frown}{AC}$) + m ($\overset{\frown}{BD}$)] .

Ce qu'il fallait démontrer



Problème type (2)

Si deux rayons portant deux cordes se coupent à l'extérieur d'un cercle, la mesure de l'angle qu'elles forment entre elles est égale à la demi-différence des mesures des arcs interceptés par cet angle.

Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$

Conclusion : $m(\angle E) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{BD})]$

Construction : On trace $\overline{BC}$.

Démonstration : $\because$ $\angle$ ABC est un angle extérieur au Δ BEC.

$\therefore m(\angle ABC) = m(\angle E) + m(\angle BCD)$

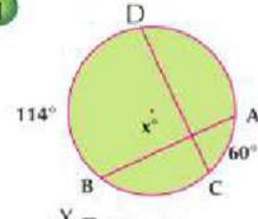
$\therefore m(\angle E) = m(\angle ABC) - m(\angle BCD)$

$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AC}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BD})$

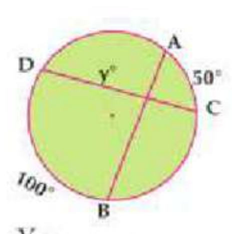
$= \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{BD})]$ ***Ce qu'il fallait démontrer***



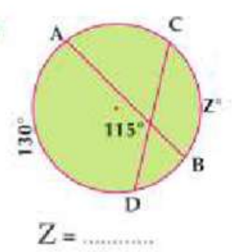
Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé comme mesure d'angle :

1


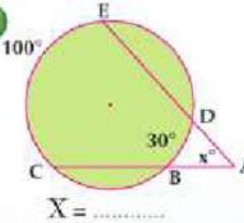
X = ...

2


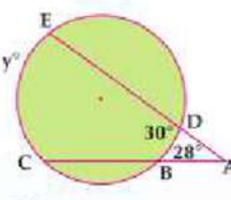
Y = ...

3


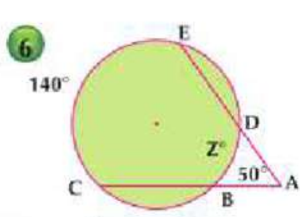
Z = ...

4


X = ...

5


Y = ...

6


Z = ...



Exemple (5) **Dans la figure ci-contre:**

$\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$, m ($\angle$ A) = 40°, $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$ et m ($\angle$ BCD) = 26°

Trouve : **A** m $(\overset{\frown}{CE})$ **B** m ($\angle$ EXC).

Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$, m ($\angle$ A) = 40°, $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$, m ($\angle$ BCD) = 26°

Conclusion : **A** m $(\overset{\frown}{CE})$ **B** m ($\angle$ EXC).

Démonstration : $\because$ m ($\angle$ BCD) = 26°

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{BD})$ = 2m ($\angle$ BCD) = 52°

$\because$ $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$

$\therefore$ m ($\angle$ A) = $\frac{1}{2}$ [m$(\overset{\frown}{CE})$ - m $(\overset{\frown}{BD})$]

$\therefore$ 40 = $\frac{1}{2}$ [m$(\overset{\frown}{CE})$ - 52]

m$(\overset{\frown}{CE})$ = 80 + 52 = 132° *(Ce qu'il fallait démontrer 1)*

$\because$ $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$ $\therefore$ m ($\angle$ EXC) = $\frac{1}{2}$ [m$(\overset{\frown}{CE})$ + m $(\overset{\frown}{BD})$]

m ($\angle$ EXC) = $\frac{1}{2}$ [132° + 52°] = $\frac{1}{2}$ × 184° = 92°

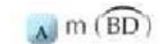
(Ce qu'il fallait démontrer 2)



Dans la figure ci-contre :

m ($\angle$ A) = 36°, m (EC) = 104°, m $(\overset{\frown}{BC})$ = m $(\overset{\frown}{DE})$

Trouve : **A** m $(\overset{\frown}{BD})$ **B** m $(\overset{\frown}{DE})$.





Complète: $\because$ $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$

$\therefore$ m ($\angle$ A) = $\frac{1}{2}$ [..................................]

$\therefore$ 36 = $\frac{1}{2}$ [..................................]

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{BD})$ = ... *(Ce qu'il fallait démontrer 1)*

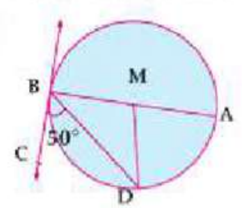
$\because$ m $(\overset{\frown}{DE})$ +m $(\overset{\frown}{BC})$ = 360° - (......... + ...) = ...

$\because$ m $(\overset{\frown}{DE})$ = m $(\overset{\frown}{BC})$ $\therefore$ 2 m $(\overset{\frown}{DE})$ =

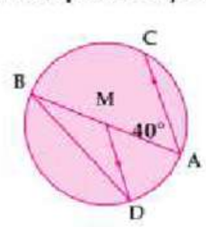
$\therefore$ m $(\overset{\frown}{DE})$ = ... *(Ce qu'il fallait démontrer 2)*

1 **Observe chacune des figures suivantes puis complète:**

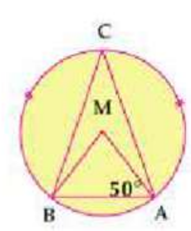




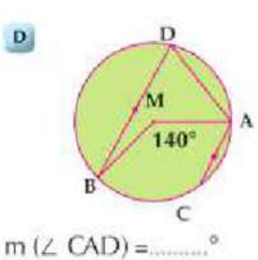
m (∠ AMD) = ... °



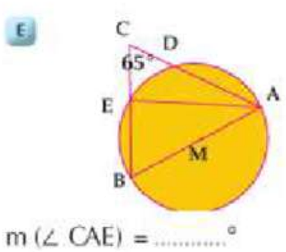
m (∠ BDM) = ... °



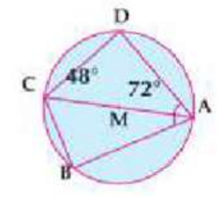
m (∠ CAM) = ... °



m (∠ CAD) = ... °



m (∠ CAE) = ... °

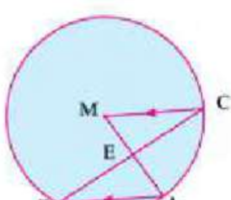


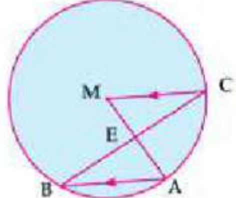
m (∠ BAC) = ... °

2 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ est un diamètre dans le cercle M, $\overline{CM} \parallel \overline{AB}$, $\overline{BC} \cap \overline{AM} = \{E\}$,

Démontre que: BE > AE.





3 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le cercle $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

m (∠ DEB) = 110° et m $(\overset{\frown}{AC})$ = 100°.

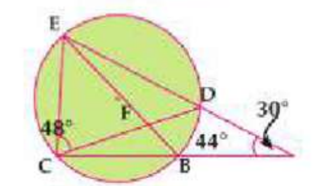
Trouve: m (∠ DCB)

4 **Dans la figure ci-contre :**

$\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$ et $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{F\}$, **Si**:

m (∠ A) = 30° , m $(\overset{\frown}{BD})$ = 44° , m (∠ DCE) = 48°

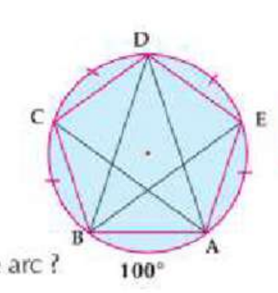
Trouve: **A** m $(\overset{\frown}{CE})$ **B** m $(\overset{\frown}{BC})$



5 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sont deux cordes dans un cercle X et Y sont les milieux de $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ respectivement. On trace $\overline{XY}$ qui coupe $\overline{AB}$ en D et $\overline{AC}$ en E. Démontre que AD = AE

5 - 3 Les angles inscrits interceptant le même arc

Réfléchis et discute :



Dans la figure ci-contre, m $(\widehat{AB}) = 100°$

♦ **Est-ce que les angles inscrits** $\angle AEB$, $\angle ADB$ et $\angle ACB$ interceptent le même arc ?

♦ *Trouve* m ($\angle$AEB), m ($\angle$ADB) et m ($\angle$ACB).

Que remarques-tu ?

♦ Est-ce que les angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure ? **Justifie ta réponse.**

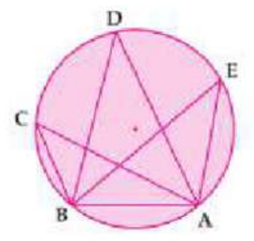
A apprendre :

☆ Comment déduire la relation entre les angles inscrits interceptant des arcs de même mesure

Théorèmes 2 *Les angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.*

Hypothèses : $\angle C$, $\angle D$ et $\angle E$ sont des angles inscrits qui interceptent l'arc $\widehat{AB}$.

Conclusion: m ($\angle$C) = m ($\angle$D) = m ($\angle$E)





Démonstration :

$\because$ m ($\angle$C) $= \frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

, m($\angle$D) $= \frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

, m ($\angle$E) $= \frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

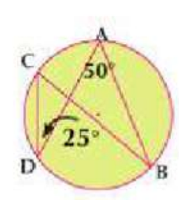
$\therefore$ m ($\angle$C) = m ($\angle$D) = m ($\angle$E) *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Pour t'entraîner :

Observe chacune des figures suivantes puis complète :



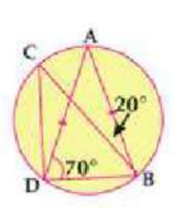
1



m (∠C) = ... °

m (∠B) = ... °

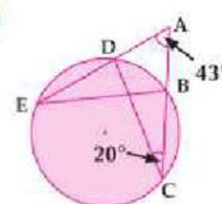
2



m (∠C) = ... °

m (∠BDC) = ... °

3



m (∠BED) = ... °

m (∠ABE) = ... °

Exemple (1)

Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ et EA = ED

Démontre que EB = EC .

D A E B C

Solution

Dans le Δ AED ∵ EA = ED ∴ m (∠D) = m (∠A) (1)

∵ ∠ABC , ∠ADC sont deux angles inscrits qui interceptent $\overset{\frown}{AC}$ ∴ m (∠B) = m (∠D) (2)

∵ ∠DBC , ∠ DAB sont deux angles inscrits qui interceptent $\overset{\frown}{BD}$ ∴ m (∠C) = m (∠A) (3)

De (1), (2) et (3) on déduit que m (∠B) = m (∠C)

Dans le Δ EBC: ∵ m (∠B) = m (∠C) ∴ EB = EC *(Ce qu'il fallait démontrer.)*

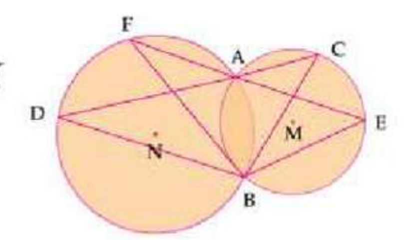




M et N sont deux cercles sécants en A et B.

$\overleftrightarrow{AC}$ coupe le cercle M en C et le cercle N en D, $\overleftrightarrow{AE}$ coupe le cercle M en E et le cercle N en F.

Démontre que : m (∠EBC) = m (∠FBD)



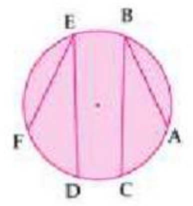


Dans un cercle (ou dans plusieurs cercles), les angles inscrits qui interceptent des arcs de même mesure ont même mesure

On remarque que :

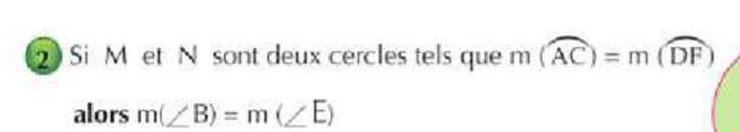
1. Dans le cercle M, si $(\widehat{AC})$ = m $(\widehat{DF})$

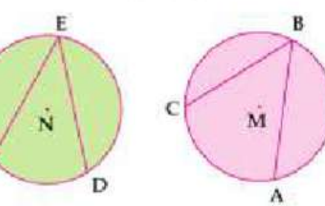
   alors m (∠B) = m (∠E)



2. Si M et N sont deux cercles tels que m $(\widehat{AC})$ = m $(\widehat{DF})$

   alors m(∠B) = m (∠E)







La réciproque du résultat précédent est vraie d'où :

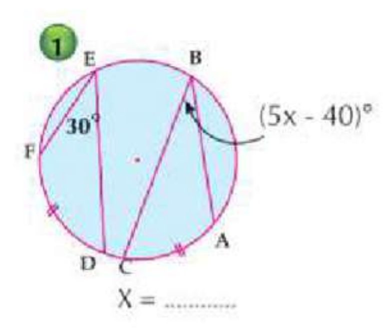
Dans un cercle (ou dans plusieurs cercles), les angles inscrits qui ont même mesure interceptent des arcs de même mesure..

Réfléchis :

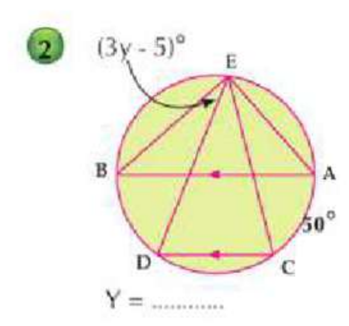
Si les arcs compris entre deux cordes qui ne se coupent pas à l'intérieur du cercle sont de même mesure, les deux cordes sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.



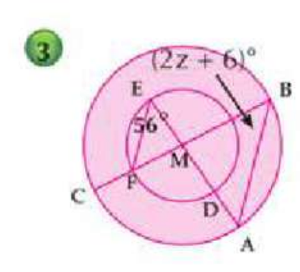
Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :



X = ...



Y = ...



Z = ...



Dans la figure ci-contre :

$\overline{AD}$ et $\overline{BE}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle, ,

$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE} = \{C\}$. **Démontre que** CD = CE .

Solution

Hypothèses : AD = BE

Conclusion : **Démontrer que** CD = CE

Démonstration : $\because$ AD = BE $\therefore$ m $(\overset{\frown}{AD})$ = m $(\overset{\frown}{BE})$

En ajoutant m $(\overset{\frown}{DE})$ aux deux membres, on déduit que : m $(\overset{\frown}{ADE})$ = m $(\overset{\frown}{BED})$

$\therefore$ m ($\angle$B) = m ($\angle$A) *(résultat)*

Dans le $\triangle$ ABC $\because$ m ($\angle$A) = m ($\angle$B) $\therefore$ A C = BC  (1)

$\because$ AD = BE (2)

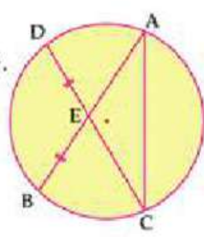
De  **(1) et (2) par soustraction, on déduit que** CD = CE *(Ce qu'il fallait démontrer)*



Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle , $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ = { E }.

Démontre que le triangle ACE est isocèle.

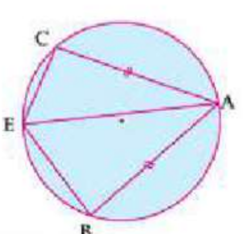




Dans la figure ci-contre :

A B = A C , E $\in \overset{\frown}{BC}$

Démontre que : m ($\angle$ AEB) = m ($\angle$ AEC)





Réfléchis :

Quel est le nombre de bissectrices de $\angle$BEC? Justifie ta réponse.

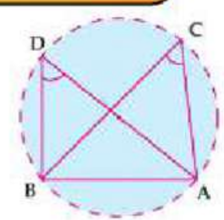
Réciproque du théorème

Si deux angles de même mesure sont tracés sur une même base et si leurs sommets sont situés d'un même côté de cette base, alors ce sont deux angle inscrits dans un même cercle passant par les extrémités de la base commune.

Dans la figure ci-contre, on observe que :

∠C et ∠ D sont tracés sur la base $\overline{AB}$, et d'un même côté de cette base et m (∠C) = m (∠D)

Donc, par les points A , B , C et D passe un seul cercle dont $\overline{AB}$ est une corde

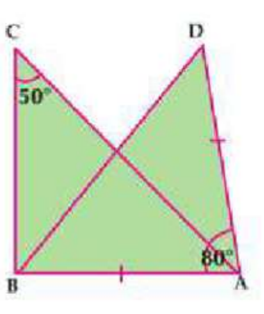




Exemple (4)

Dans la figure ci-contre, AB = AD , m (∠A) = 80° et m (∠C) = 50°

Démontre que par les points A, B, C et D passe un seul cercle .



Solution

Dans △ ABD ∵ A B = AD , m (∠A) = 80°

∴ m (∠D) = m (∠A B D) = $\frac{180° - 80°}{2}$ = 50°

∵ m (∠D) = m (∠C) = 50°

et ce sont deux angles tracés su la base $\overline{AB}$ et d'un même côté de cette base

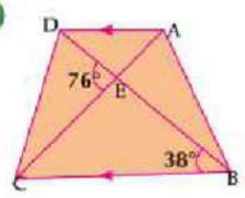
∴ par les points A , B , C et D passe un seul cercle. ***(Q.E.D.)***

Pour t'entraîner :

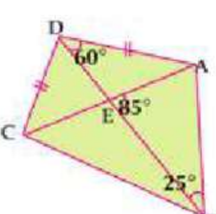
Dans chacune des figures suivantes, peut-on tracer un cercle passant par les points A , B , C et D ? Justifie ta réponse .



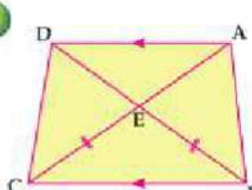
1



2

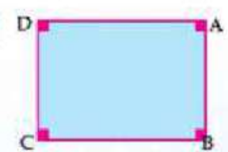


3

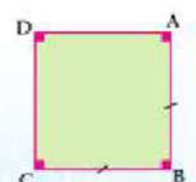




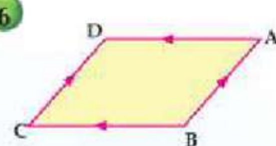
4



5



6





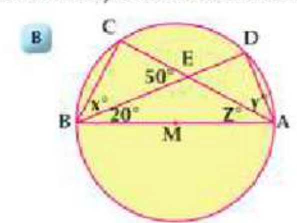




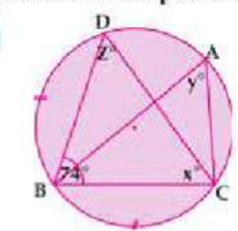
1 **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :**

A

B



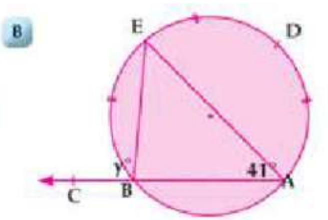
C



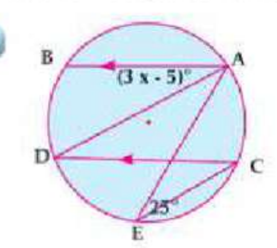
2 **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :**

A

B



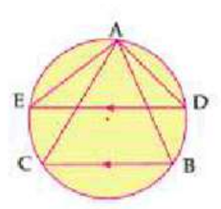
C



3 **Dans la figure ci-contre :**

ABCD est un triangle inscrit dans un cercle et $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Démontre que m ($\angle$ DAC) = m ($\angle$BAE) .



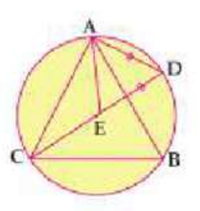
4 $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, m ($\angle$ ABC) = 40° et D $\in \widehat{BC}$.

Trouve m ($\angle$CDB)

5 ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle ,

D$\in \widehat{AB}$ et E$\in \overline{DC}$ tels que AD = DE.

Démontre que le triangle ADE est équilatéral.



6 ABC est un triangle isocèle tel que AB =AC, D est le milieu de $\overline{BC}$, On trace $\overrightarrow{BE} \perp \overline{AC}$ tel que $\overrightarrow{BE} \cap \overline{AC}$ = {E}. **Démontre que** par les points A , B , C et D passe un seul cercle.



Quadrilatère inscriptible



A apprendre :

- ☆ La notion d'un quadrilatère inscriptible.
- ☆ Déterminer quand un quadrilatère est inscriptible.

Expressions de base:

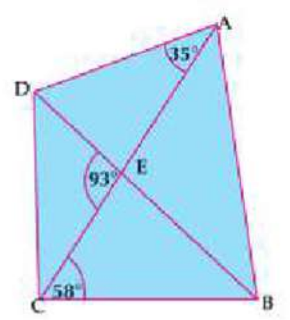
- ☆ quadrilatère inscriptible

Réfléchis et discute :

Dans la figure ci-contre

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en E, m (∠ ACB) = 58° et m(∠CAD) = 35°, m (∠CED) = 93°.

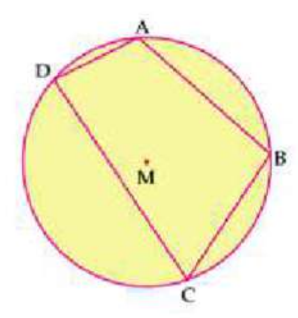
Peut-on tracer un cercle passant par les sommets du quadrilatère ABCD ? Justifie ta réponse.



Un quadrilatère inscriptible	**est un quadrilatère dont les quatre sommets appartiennent à un seul cercle.**

On remarque que :

1. **le quadrilatère ABCD** est inscriptible car ses sommets A, B, C et D appartiennent au cercle de centre M.

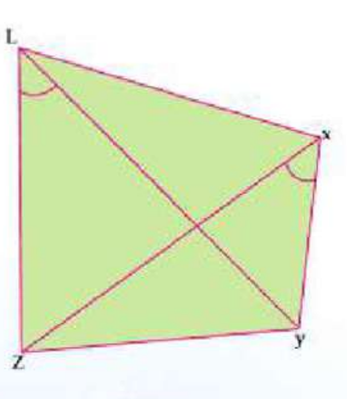


2. **le quadrilatère XYZT est inscriptible car :**

m (∠YXZ) = m (∠YLZ)

et ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{YZ}$ et d'un même côté d'où on peut tracer un cercle passant par les points X, Y, Z et T.

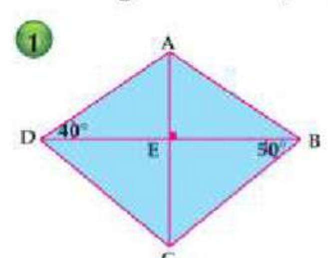
Donc, les sommets du quadrilatère XYZT appartiennent à un seul cercle .

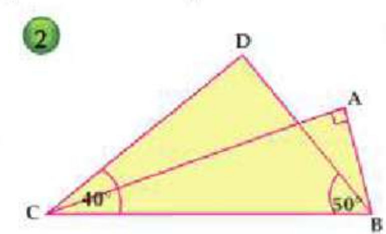


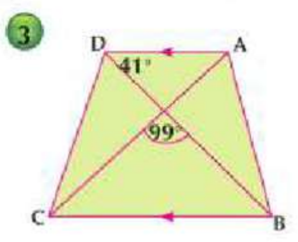


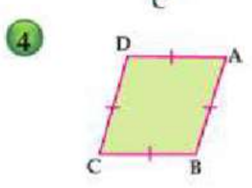
Pour t'entraîner :

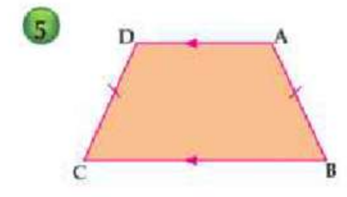
Dans les figures suivantes, lesquelles sont des quadrilatères inscriptibles ? Justifie ta réponse :













Exemple (1)

Dans la figure ci-contre

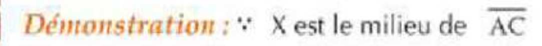
$\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M, X est le milieu de $\overline{AC}$ et $\overrightarrow{XM}$ coupe la tangente au cercle qui passe par le point B en Y.

Démontre que le quadrilatère AXBY est inscriptible

Solution

Hypothèses : $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M, AX = CX et $\overrightarrow{BY}$ est une tangente au cercle en B.

Conclusion : Démontrer que le quadrilatère AXBY est inscriptible



Démonstration : $\because$ X est le milieu de $\overline{AC}$ $\therefore$ $\overline{MX} \perp \overline{AC}$, m ($\angle$ AXY) = 90°

$\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M , et $\overrightarrow{BY}$ une tangent au cercle en B $\therefore$ $\overrightarrow{BY} \perp \overline{AB}$ et m ($\angle$ABY) = 90°

$\because$ m ($\angle$ AXY) = m ($\angle$ ABY) = 90°

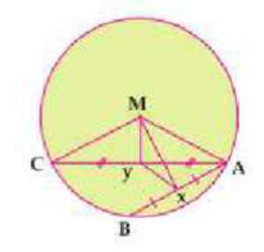
et ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{AY}$ et d'un même côté .

$\therefore$ Le quadrilatère AXBY est inscriptible.



Réfléchis : ***Dans l'exemple précédent, où se trouve le centre du cercle passant par les sommets du quadrilatère AXBY ? Justifie ta réponse.***

Pour t'entraîner :



Dans la figure ci-contre :

M est le centre du cercle, X et Y sont les milieux de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ respectivement.

Démontre que : (1) AXYM est inscriptible.

(2) m (∠MXY) = m (∠MCy)

(3) $\overline{AM}$ est un diamètre du cercle passant par les points A, X, Y et M

Exemple (2)

ABCD est un quadrilatère inscriptible dont les diagonales se coupent en F. X ∈ $\overline{AF}$ tels que Y ∈ $\overline{DF}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overline{AD}$.

Démontre que : (1) Le quadrilatère BXYC est inscriptible. (2) m (∠XBY) = m (∠XCY)

Solution

Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscriptible, $\overline{XY}$ // $\overline{AD}$

Conclusion : **Démontrer que :** (1) Le quadrilatère BXYC est inscriptible

(2) m (∠XBY) = m (∠XCY)



Démonstration : ∵ $\overline{XY}$//$\overline{AD}$ ∴ m (∠CAD) = m (∠CXY) ***Corresponding***

∵ m (∠CAD) = m (∠CBD) ***deux angles inscrits interceptant l'arc*** $\overset{\frown}{CD}$

∴ m (∠CXY) = m (∠CBY)

ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{CY}$ et d'un même côté

∴ Le quadrilatère BXYC est inscriptible.



(Q.E.D 1)

∵ Le quadrilatère BXYC est inscriptible. ***(Proof)***

∴ m (∠XBY) = m (∠XCY)

(Ce qu'il fallait démontrer)

Pour t'entraîner :

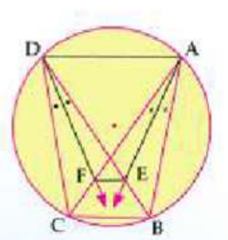
Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère tel que :

$\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de l'angle ∠BAC et $\overrightarrow{DF}$ est une bissectrice de l'angle ∠ BDC, **Démontre que :**

(1) AEFD est un quadrilatère inscriptible.

(2) $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$.





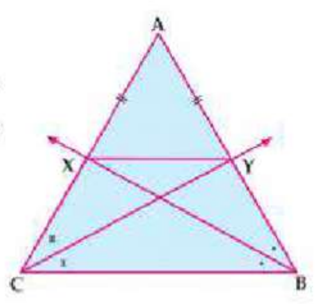
Exercices (5-4)

1 **Dans la figure ci-contre :**

ABC est un triangle tel que AB = AC $\overrightarrow{BX}$ est une bissectrice de l'angle ∠B qui coupe $\overline{AC}$ en X , $\overrightarrow{BY}$ est une bissectrice de l'angle ∠C qui coupe $\overline{AB}$ en Y

Démontre que : (1) BCXY est un quadrilatère inscriptible

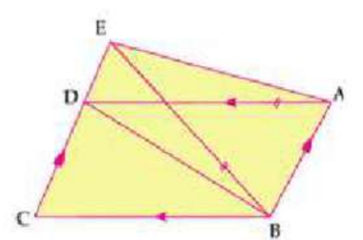
(2) $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{BC}$.



2 **Dans la figure ci-contre :**

ABCD est un parallélogramme. E ∈ $\overrightarrow{CD}$ tel que BE = AD

Démontre que le quadrilatère ABDE est un quadrilatère inscriptible.

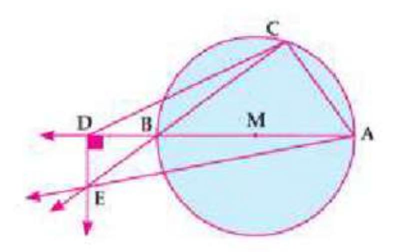


3 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle , D ∈ $\overrightarrow{AB}$ où D ∉ $\overline{AB}$,

On trace $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AB}$, C ∈ $\widehat{AB}$ et $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE}$ = {E}

Démontre que le quadrilatère ACDE est un quadrilatère inscriptible..



4 ABCD est un carré , $\overrightarrow{AX}$ est une bissectrice de l'angle ∠ BAC qui coupe $\overline{BD}$ en X $\overrightarrow{DY}$ est une bissectrice de l'angle ∠CDB qui coupe $\overline{AC}$ en Y .

Démontre que : (1) AXYD est un quadrilatère inscriptible

(2) m ∠(AYX) = 45 °

5 ABC est un triangle inscrit dans un cercle. , X ∈ $\widehat{AB}$, Y ∈ $\widehat{AC}$ tels que m ($\widehat{AX}$) = m ($\widehat{AY}$),
$\overline{CX} \cap \overline{AB}$= {D}, $\overline{BY} \cap \overline{AC}$ = {E} .

Démontre que : (1) BCED est un quadrilatère inscriptible

(2) m (∠ DEB) = m (∠XAB) .



Propriétés d'un quadrilatère inscriptible



A apprendre:

- ☆ Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.
- ☆ Comment résoudre des problèmes sur les Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.

Expressions de base:

- ☆ quadrilatère inscriptible

Réfléchis et discute :

Dans la figure ci-contre :

Si m (∠A) = 60° , alors m ($\overset{\frown}{BCD}$) = ...°

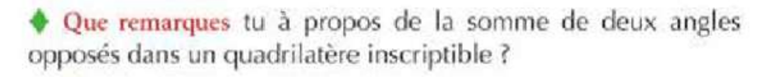


♦ m ($\overset{\frown}{BAD}$) = ...°

♦ m (∠BCD) = ...°



♦ m (∠B) = 80° alors m (∠D) = ...



♦ **Que remarques** tu à propos de la somme de deux angles opposés dans un quadrilatère inscriptible ?



Dans un quadrilatère inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires.

Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscriptible.

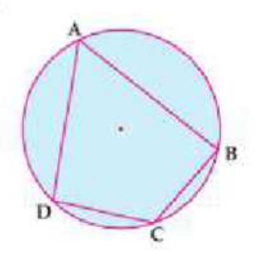


Conclusion : **Démontrer que :** (1) m (∠A) + m (∠C) = 180°

(2) m (∠B) + m (∠D) = 180°

Démonstration : ∵ m (∠A) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{BCD}$)

et m (∠C) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{BAD}$)



∴ m (∠A) + m (∠C)

= $\frac{1}{2}$ [m ($\overset{\frown}{BCD}$) + m ($\overset{\frown}{BAD}$)]

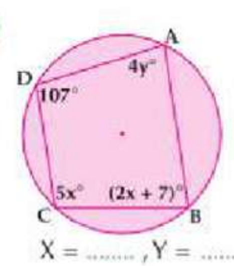
= $\frac{1}{2}$ × 360° = 180°

De même, m (∠B) + m (∠D) = 180°

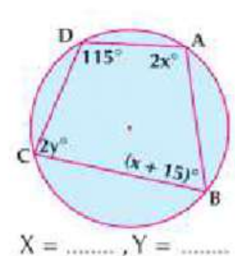
(Ce qu'il fallait démontrer.)

Pour t'entraîner : **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :**

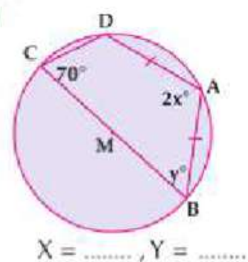




X = ... , Y = ...



X = ... , Y = ...



X = ... , Y = ...



ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle M tel que $M \in \overline{AB}$, CB = CD , m $\angle$(BCD) = 140°

Trouve : (1) m ($\angle$A) (2) m ($\angle$D)

Solution

∵ ABCD est un quadrilatère inscriptible

∴ m ($\angle$A) + m ($\angle$C) = 180° *(théorème)*

∴ m ($\angle$A) = 180° - 140° = 40°

On trace $\overline{BD}$, dans le triangle △ BCD ∵ CB = CD

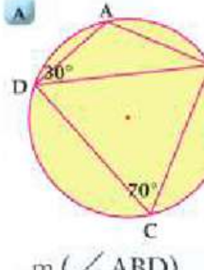
∴ m ($\angle$CDB) = m ($\angle$CBD) = $\frac{180° - 140°}{2}$ = 20°

∵ $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M ∴ m ($\angle$ADB) = 90°

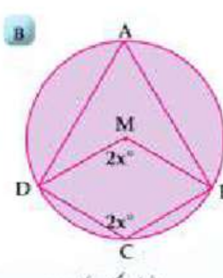
∴ m ($\angle$ADC) = 90° + 20° = 110° *(Ce qu'il fallait démontrer)*



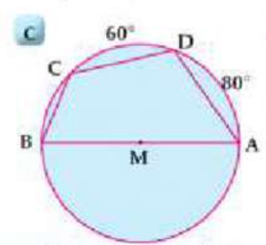
A l'aide des données de chaque figure, trouve en justifiant :



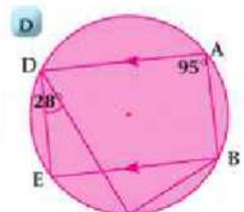
m ($\angle$ ABD)



m ($\angle$ A)



Les mesures des angles de la figure ABCD

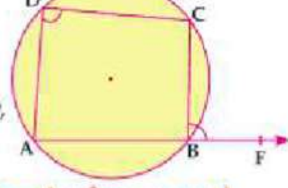


Les mesures des angles de la figure ABCD



Corollaire: *La mesure d'un angle extérieur en un sommet d'un quadrilatère inscriptible est égale à la mesure de l'angle intérieur opposé à son adjacant.*

Dans la figure ci-contre



ABCD est un quadrilatère tel que $E \in \overrightarrow{AB}$, $E \notin \overline{AB}$

$\therefore$ ∠ EBCest un angle extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD,

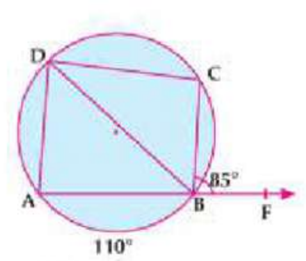
et D est l'angle intérieur qui lui est opposé.

Donc: m (∠ EBC) = m (∠ D) ***(Les suppléments d'un même angle ont même mesure)***



Exemple (2)

Dans la figure ci-contre :



$E \in \overrightarrow{AB}$ et $E \notin \overline{AB}$, m $(\widehat{AB})$ = 110°, m (∠ CBE) = 85°

Trouve m (∠ BDC) .

Solution

$\because$ m $(\widehat{AB})$ = 110° et ∠ ADB est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{AB}$

$\therefore$ m (∠ ADB) = $\frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$ = 55° .

$\because$ ∠ CBE est un angle extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD

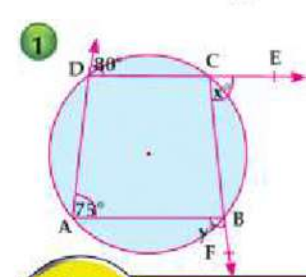
$\therefore$ m (∠ CBE) = m (∠ CDA) = 85° *(corollaire)*

$\therefore$ m (∠ BDC) = 85° - 55° = 30° *(Ce qu'il fallait démontrer)*

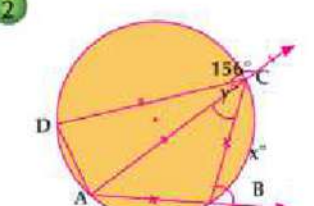
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

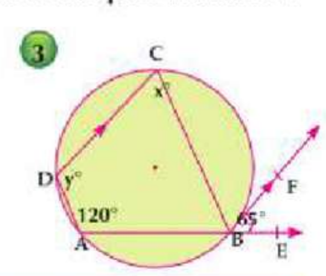
1



2



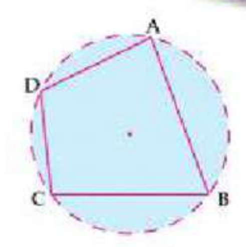
3



Réciproque du théorème 3 *Si deux angles opposés d'un quadrilatère sont supplémentaires, alors le quadrilatère est inscriptible.*



Dans la figure ci-contre :



Si m (∠ A) + m (∠ C) = 180°

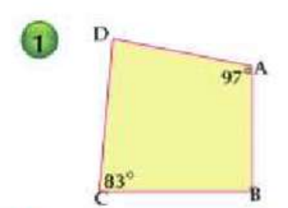
ou m (∠ B+ m (∠ D) = 180°

alors , le quadrilatère ABCD est inscriptible.

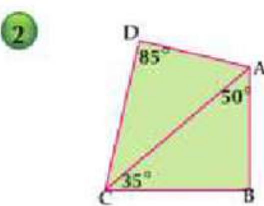


Dans chacune des figures suivantes, démontre que le quadrilatère ABCD est inscriptible :

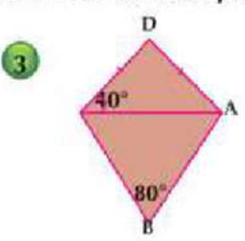
1



2



3





Dans un quadrilatère, si un angle extérieur en un de ses sommets et l'angle intérieur du sommet opposé ont même mesure, alors le quadrilatère est inscriptible.

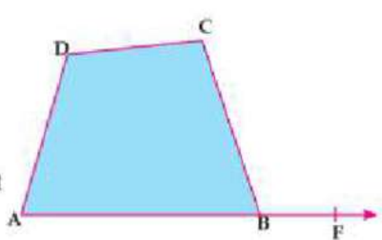
Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère tel que, $E \in \overrightarrow{AB}$, $E \notin \overline{AB}$

∴ ∠ EBC est un angle extérieur au quadrilatère ABCD

et ∠ D est l'angle intérieur du sommet opposé

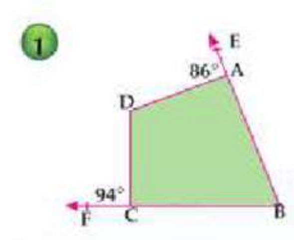
Si m (∠ EBC) = m (∠ D) alors le quadrilatère ABCD est inscriptible



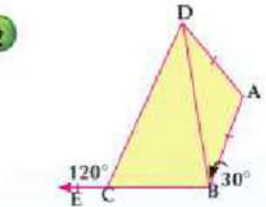


Dans chacune des figures suivantes, démontre que le quadrilatère est inscriptible :

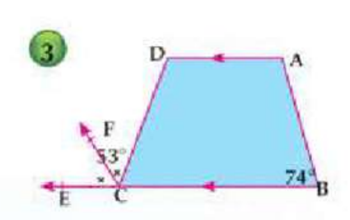
1



2

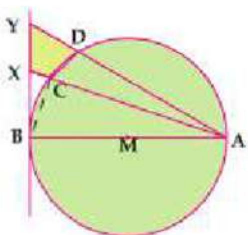


3





Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M , $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$ sont deux cordes du cercle d'un même côté par rapport à $\overline{AB}$

Du point B, on trace une tangente au cercle qui coupe $\overrightarrow{AC}$ en X et $\overrightarrow{AD}$ en Y .

Démontre que XYDC est un quadrilatère inscriptible.

Solution

On trace $\overline{BC}$ $\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre

$\therefore$ m ($\angle$ACB) = 90° et l'angle $\angle$ ABC est un complément de l'angle $\angle$BAX (1)

$\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre et $\overrightarrow{BY}$ une tangente au cercle en B.

$\therefore$ m ($\angle$ABX) = 90° et l'angle $\angle$AXB est un complément de l'angle $\angle$BAX (2)

De (1) **et** (2)

$\therefore$ m (**$\angle$ABC**) **=** m (**$\angle$AXB**)

$\because$ $\angle$ YDC est extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD

$\therefore$ m ($\angle$YDC) = m ($\angle$ ABC) = m ($\angle$ AXB)

$\because$ $\angle$ AXB est extérieur au quadrilatère inscriptible XYDC et $\angle$YDC est l'angle intérieur qui lui est opposé .

$\therefore$ La figure XYDC est un quadrilatère inscriptible

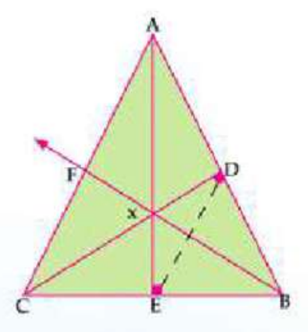


Réfléchis :

Sous quelles conditions un quadrilatère peut-il être inscriptible ? Cite tous les cas possibles



Dans la figure ci-contre, démontre que :

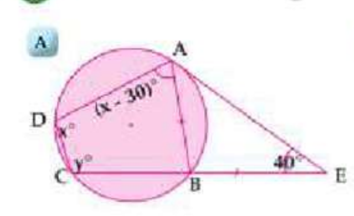


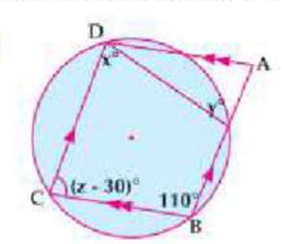
Les droites passant par les sommets d'un triangle et perpendiculaires aux côté opposés à ces sommets sont concourantes

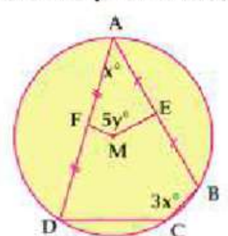
Quel est le nombre de quadrilatères inscriptibles dans la figure ci-contre ? Cite ces quadrilatères.



1 **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :**

A


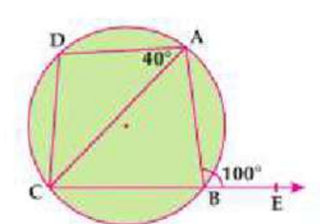
B


C


2 **Dans la figure ci-contre :**

m (∠ ABE) = 100° , m (∠ CAD) = 40°

Démontre que m $(\overset{\frown}{CD})$ = m $(\overset{\frown}{AD})$.

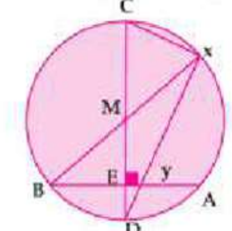


3 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ est une corde dans le cercle M $\overline{CD}$ est un diamètre perpendiculaire à $\overline{AB}$ qui le coupe en E, $\overrightarrow{BM}$ coupe le cercle en X et $\overline{XD} \cap \overline{AB}$ = {Y}

Démontre que (1) la figure XYEC est inscriptible.

(2) m (∠ DYB) = m (∠ DBX)

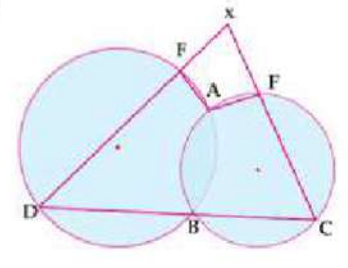


4 **Dans la figure ci-contre :**

les deux cercles se coupent en A et B , $\overline{CD}$ passe par le point B et coupe les deux cercles en C et D,

$\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{DF}$ = {X} .

Démontre que la figure AFXE est inscriptible.



5 ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que AB > AC, D∈ $\overline{AB}$ tel que AC = AD , $\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de ∠ A qui coupe $\overline{BC}$ en E et qui coupe le cercle en F.

Démontre que la figure BDEF est inscriptible.



Relation entre les tangentes d'un cercle



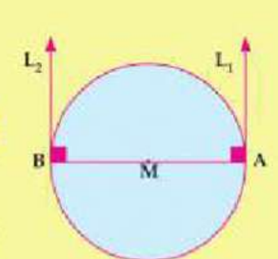
A apprendre :

- ☆ Comment déduire la relation entre deux segments tangentiels issus d'un même point à l'extérieur d'un cercle ?.
- ☆ La notion d'un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ Comment déduire la relation entre les tangentes communes à deux cercles disjoints.

Expressions de base:

- ☆ la corde qui joint deux points de contact.
- ☆ un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ des tangentes communes

Réfléchis et discute



On sait que les tangentes passant par les deux extrémités d'un diamètre d'un cercle sont parallèles .

Quelle est la relation entre les deux tangentes passant par les deux extrémités d'une corde qui ne passe pas par le centre du cercle ?

Dans la figure ci-contre :

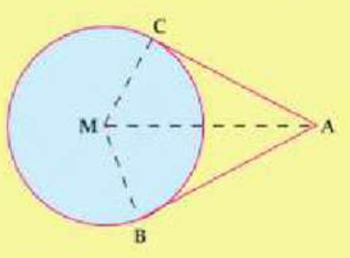
On remarque que :

si $\overline{AB}$ est une corde au cercle M, alors les deux tangentes L_1 et L_2 se coupent en un point C .

$\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ sont appelés « segments tangentiels » et $\overline{AB}$ est appelé « une corde qui passe par les deux points de contact ».



Deux segments tangents à un cercle issus d'un même point ont même longueur.



Hypothèses : A et un point à l'extérieur d'un cercle M, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C.

Conclusion :

Démontrer que : AB = AC

Construction : On trace $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ et $\overline{MA}$

Démonstration : ∵ $\overline{AB}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

∴ m (∠AMB) = 90°

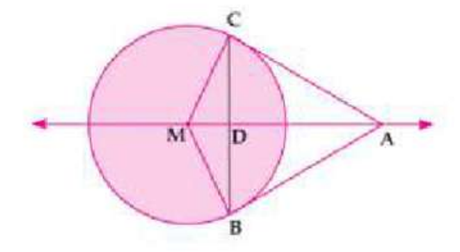
∵ $\overline{AC}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

∴ m (∠ACM) = 90°

∵ Dans les deux triangles ABM et ACM, on a :

m(∠B) = m (∠C) = 90°	*(résultat démontré)*
MB = MC	*(longueurs de rayons)*
$\overline{AB}$ est un côté commun .	∴ △ABM ≡ △ACM
Donc : $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$	∴ AB = AC *(Ce qu'il fallait démontrer)*


Réfléchis **Dans la figure ci-contre :**



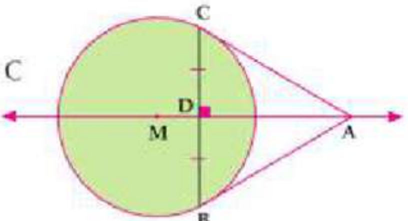
- Pourquoi $\overleftrightarrow{MA}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$?
- Pourquoi $\overrightarrow{AM}$ est la médiatrice de ∠BAC?
- Pourquoi $\overrightarrow{MA}$ est la médiatrice de ∠BMC?

Corollaires :



La droite passant par le centre d'un cercle et par le point d'intersection de deux tangentes au cercle est la médiatrice de la corde qui joint les points de contact de ces deux tangentes.

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C

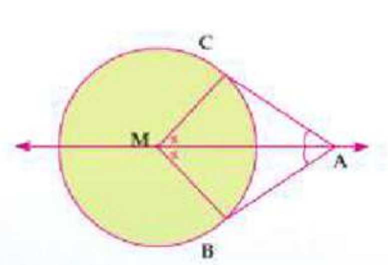
Alors : $\overleftrightarrow{AM}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$

Donc : $\overleftrightarrow{AM} \perp \overline{BC}$, et BD = CD



La droite passant par le centre d'un cercle et par le point d'intersection de deux tangentes au cercle est une bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes et est une bissectrice de l'angle formé par les deux rayons passant par les deux points de contact.

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C .

Alors : $\overrightarrow{AM}$ est une bissectrice de l'angle ∠A

∴ m (∠BAM) = m (∠CAM)

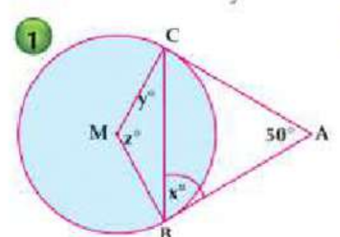
et $\overrightarrow{MA}$ est une bissectrice de l'angle ∠BMC

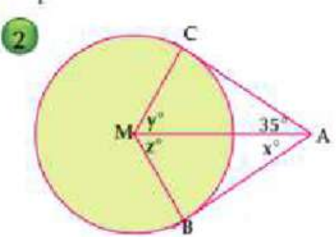
Donc : ∴ m (∠ AMB) = m (∠ AMC)

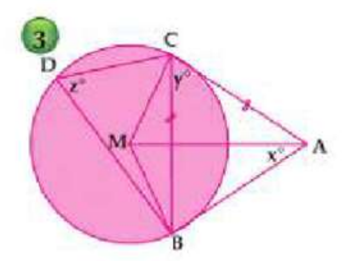
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M

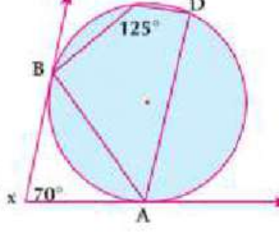
Trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :







Exemple (1)



Dans la figure ci-contre :

$\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$ sont deux tangentes au cercle en A et B.

m (∠ AXB) = 70°, m (∠ DCB) = 125°

Démontre que : (1) $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice ∠ DAX . **(2)** $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$.



Solution

Hypothèses : $\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$ sont deux tangentes au cercle en A et B,

m (∠AXB) = 70° et m (∠ DCB) = 125° .

Conclusion : **(1)** $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice ∠DAX

(2) $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$.

Démonstration : ∵ $\overline{XA}$ et $\overline{XB}$ sont deux segments tangents. ∴ XA = XB

in △ XAB

∵ m (∠XAB) = m (∠XBA), m (∠X) = 70°

∴ m (∠XAB) = $\frac{180° - 70°}{2}$ = 55° (1)

∵ ABCD est un quadrilatère inscriptible et m (∠C) = 125°

∴ m (∠ DAB) = 180° - 125° = 55° (2)

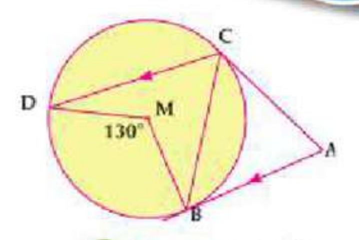
De (1) et (2) on déduit que : m (∠XAB) = m (∠ DAB) = 55°

∴ $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice de ∠DAX

∵ m (∠XBA) = m (∠DAB) = 55° ***et ils sont dans des positions alternes-internes***

∴ $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$ ***(Ce qu'il fallait démontrer)***





Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M,

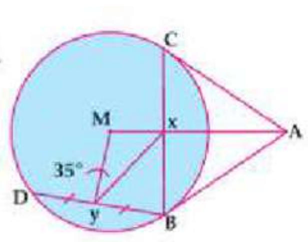
$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, m (∠BMD) = 130° .

1 Démontre que : $\overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de l'angle ∠ ACD

2 ***Trouve*** m (∠A) .

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M en B et C.

$\overline{AM}$ ∩ $\overline{BC}$ = {X}, Y est le milieu de $\overline{BD}$

m (∠XYM) = 35° .

A Démontre que : le quadrilatère XBYM est inscriptible .

B ***Trouve*** m (∠A) .

Solution

∵ $\overline{AB}$, et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M en B et C

∴ $\overleftrightarrow{AM}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$, m(∠BXM) = 90° (1)

∵ Y est le milieu de $\overline{BD}$

∴ m (∠BYM) = 90° (2)

De (1) et (2)

∴ La figure XBYM est un quadrilatère inscriptible.

On trace $\overline{BM}$

∵ Le quadrilatère XBYM est inscriptible et m (∠XYM) = 35° .

∴ m (∠XBM) = m (∠XYM) = 35°

∵ $\overline{AB}$ est un segment tangent et $\overline{BM}$ est un rayon.

∴ m (∠ ABM) = 90°

∴ m (∠ ABC) = 90° - 35° = 55°

∵ AB = AC

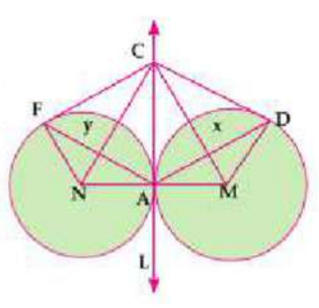
∴ m (∠ABC) = m (∠ACB) = 55°

∴ m (∠A) = 180° - (55° + 55°) = 70° ***(Ce qu'il fallait démontrer)***



Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

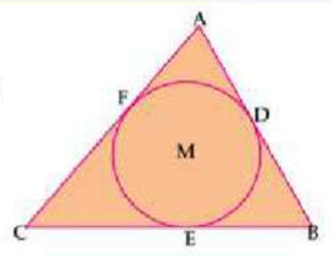


M et N sont deux cercles tangents extérieurement en A. La droite L est une tangente commune aux deux cercles en A. C est un point de la droite L. Du point C, on trace deux tangentes aux deux cercle M et N qui les coupent aux points de contact D et E respectivement $\overline{CM} \cap \overline{DA} = \{X\}$ et $\overline{CN} \cap \overline{AE} = \{Y\}$

1. **Quel est le nombre de quadrilatères inscriptibles dans cette figure ?**
2. **Démontre que : CD = CA = CE, Donne une interprétation géométrique .**

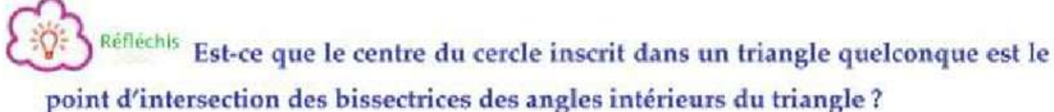
Définition **Le cercle tangent aux côtés d'un polygone est appelé cercle inscrit dans le polygone.**

Dans la figure ci-contre :



M est un cercle inscrit au triangle ABC car le cercle est tangent aux côtés du triangle en D, E et F.

Donc : Le triangle ABC est circonscrit au cercle M.



Réfléchis **Est-ce que le centre du cercle inscrit dans un triangle quelconque est le point d'intersection des bissectrices des angles intérieurs du triangle ?**



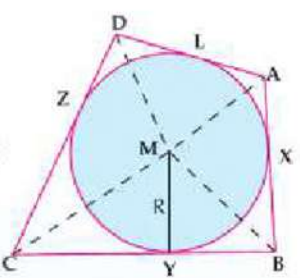
Exemple (3)

Dans la figure ci-contre :

M est un cercle inscrit dans un quadrilatère ABCD, de longueur de rayon 5 cm, AB = 9 cm et CD = 12 cm

Calcule le périmètre de la figure ABCD puis calcule son aire.

Solution



∵ Le cercle M est inscrit dans un quadrilatère ABCD

∴ le cercle est tangent aux côtés du quadrilatère ABCD en X, Y, Z et T

∵ $\overline{AX}$ et $\overline{AL}$ sont deux segments tangents au cercle

∴ AX = AL

$\because$ $\overline{BX}$ et $\overline{BY}$ sont deux segments tangents au cercle M $\therefore$ B X = BY

De même, on a , CZ= CY $\therefore$ DZ = DL

Par addition, on obtient : (AX + BX) + (CZ + DZ) = AL + BY + CY + DL

$\therefore$ AB + CD = AD+ BC = $\frac{1}{2}$ du périmètre de la figure ABCD

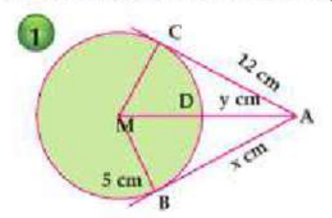
Périmètre de la figure = 2(9 + 12) = 42cm ,

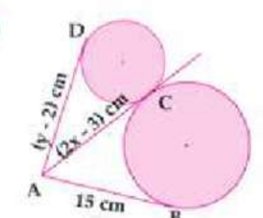
Aire de la figure ABCD $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ r + $\frac{1}{2}$ BC $\times$ r + $\frac{1}{2}$ CD $\times$ r+ $\frac{1}{2}$ AD $\times$ r

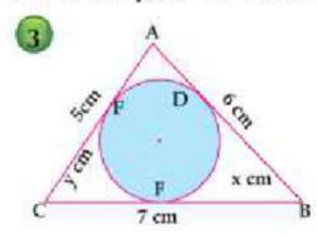
$= \frac{1}{2}$ du périmètre de la figure $\times$ r $= \frac{1}{2} \times 42 \times 5 = 105\text{cm}^2$



A l'aide des données de chaque figure, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

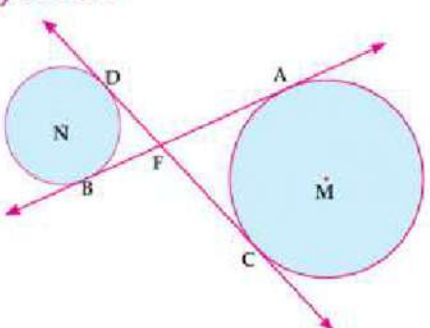
1


2


3


Tangentes communes à deux cercles disjoints :

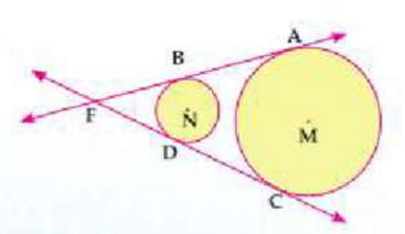
A La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est appelée « une tangente commune intérieure aux deux cercle M et N » car les deux cercles sont situés de part et d'autre par rapport à $\overleftrightarrow{AB}$, **De même** $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente commune intérieure aux deux cercles.



On remarque que : $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

Dans la figure ci-contre, démontre que : AB = CD

B La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est appelée « une tangente commune extérieure aux deux cercle M et N » car les deux cercles sont situés d'un même côté par rapport à, $\overleftrightarrow{AB}$, De même $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente commune extérieure aux deux cercles.

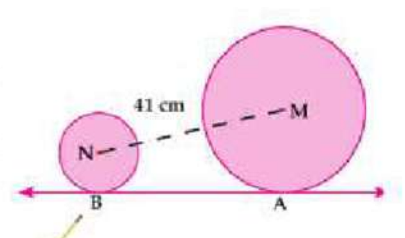


On remarque que : $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{F\}$

Dans la figure ci-contre, démontre que AB = CD

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre : $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune extérieure aux deux cercle M et N en A et B respectivement et les rayons des deux cercles sont de longueurs respectives 17 cm et 8 cm. Si MN = 41 cm, trouve la longueur de $\overline{AB}$





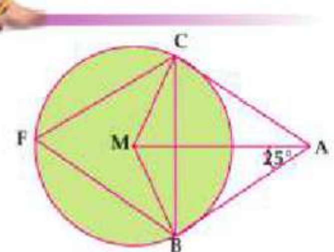
Exercices 5-6

1 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M .

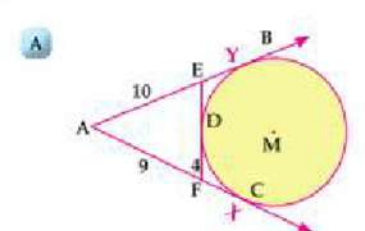
m (∠ BAM) = 25° , E appartient au grand arc $\widehat{BC}$

Trouve : **(1)** m (∠ ACB) **(2)** m (∠ BEC).

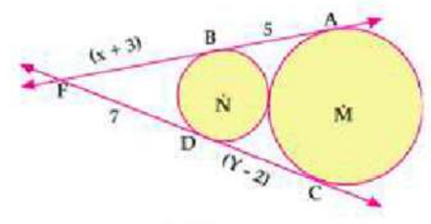


2 **Dans chacune des deux figures suivantes, trouve la valeur de x et y en centimètres.**

A



B

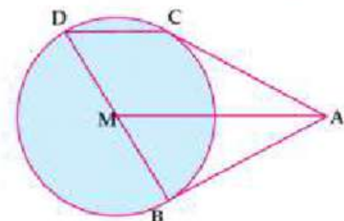


3 **Dans la figure ci-contre:**

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M,

$\overline{BD}$ est un diamètre du cercle.

Démontre que $\overline{AM} // \overline{CD}$



4 M et N sont deux cercles tangents extérieurement en D

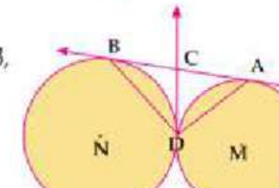
$\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune aux deux cercles en A et B,

$\overrightarrow{DC}$ est une tangente commune aux deux cercles en D

telle que $\overrightarrow{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{C\}$.

Démontre que : (1) C est le milieu de $\overline{AB}$.

(2) $\overline{AD} \perp \overline{BD}$.



5 $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M tel que AB = 10 cm. C est un point du cercle. Du point C, on trace une tangente qui coupe les deux tangentes passant par A et B en X et Y respectivement où XY = 13 cm

A **Démontre que :** $\overline{XM} \perp \overline{YM}$.

B *Trouve* l'aire de la figure of AXYB.

5 - 7

Angles tangentiels



- La notion d'un angle tangentiel
- Comment déduire la relation entre un angle tangentiel et un angle inscrit interceptant le même arc.
- La relation entre un angle tangentiel et un angle au centre interceptant le même arc.
- Comment résoudre des problèmes sur les angles tangentiels.

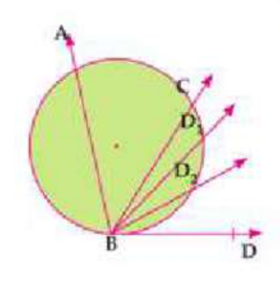
Expressions de base:

- angle tangentiel.
- angle inscrit.
- angle au centre.

Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre:

$\angle ABC$ est un angle inscrit de côtés $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ et d'arc $\overset{\frown}{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B. Imaginons la rotation de l'un des deux côtés de l'angle inscrit. Si par exemple, le côté $\overrightarrow{BC}$ tourne autour du point B en s'éloignant du côté $\overrightarrow{BA}$ pour prendre les positions $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{BC_2}$, ...



- Est-ce que la mesure de l'angle inscrit formé change selon les positions $\angle ABC_1$ et $\angle ABC_2$, ...
- **Est-ce que** m $(\overset{\frown}{AC_1})$ et m $(\overset{\frown}{AC_2})$, ... augmentent ?
- Si $\overrightarrow{BC}$ se confond avec la tangente $\overrightarrow{BD}$ **que remarques-tu ?**

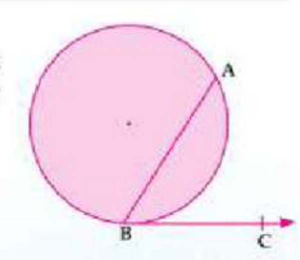
On remarque qu'on obtient l'angle inscrit de la plus grande mesure lorsque $\overrightarrow{BC}$ est sur le point de se confondre avec la tangente $\overrightarrow{BD}$. Dans ce cas, $\angle ABD$ est appelé « angle tangentiel ». C'est une position limite de l'angle inscrit. Par conséquence, on a :

$$m(\angle ABD) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{ACD})$$

L'angle tangentiel	**est un angle dont le sommet appartient à un cercle et dont un côté est tangent au cercle et l'autre côté coupe le cercle.**

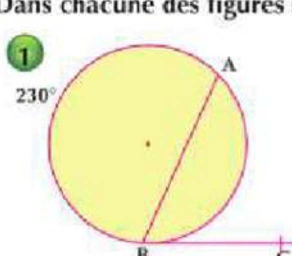
On a :
la mesure d'un angle tangentiel est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté .

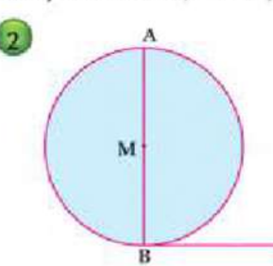
Donc : $m(\angle ABC) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{AB})$

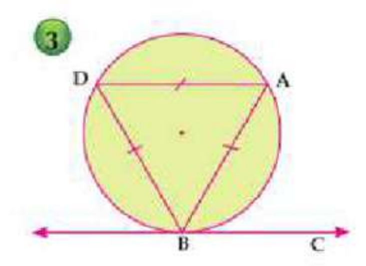


Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, calcule m (∠ ABC) .

① 

② 

③ 

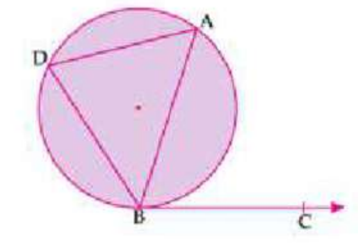


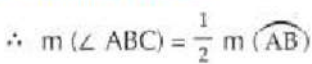
Un angle tangentiel et un angle inscrit interceptant le même arc ont même mesure.

Hypothèses : ∠ ABC est un angle tangentiel et ∠ D est un angle inscrit qui interceptent l'arc AB.

Conclusion : **Démontrer que :** m (∠ ABC) = m (∠ D)

Démonstration : ∵ ∠ ABC est un angle tangentiel

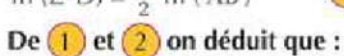




∴ m (∠ ABC) = $\frac{1}{2}$ m ($\widehat{AB}$)  (1)

∵ ∠ D est un angle inscrit

∴ m (∠ D) = $\frac{1}{2}$ m ($\widehat{AB}$)  (2)



De (1) et (2) on déduit que :

m (∠ ABC) = m (∠ C)

Ce qu'il fallait démontrer.



La mesure d'un angle tangentiel est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

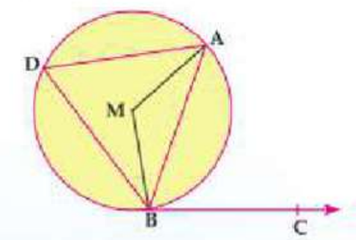
Dans la figure ci-contre :

$\overrightarrow{BC}$ est une tangente au cercle M, $\overline{AB}$ est une corde qui passe par le point de contact

∴ m (∠ ABC) = m (∠ D) *(théorème)*

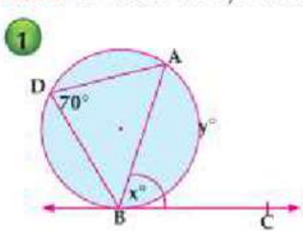
∵ m (∠ D) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB) *(théorème)*

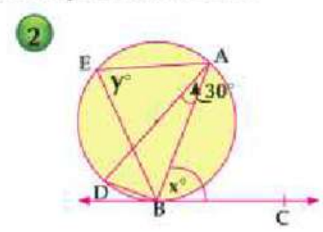
∴ m (∠ ABC) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB)

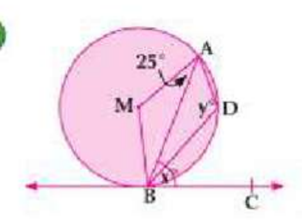


Pour t'entraîner : **Dans chacune des figures suivantes:** $\overleftrightarrow{BC}$ est une tangente au cercle.

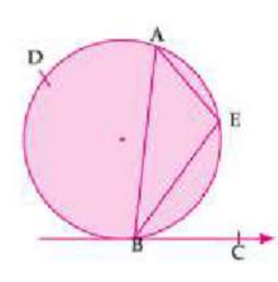
Trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

1. 

2. 

3. 

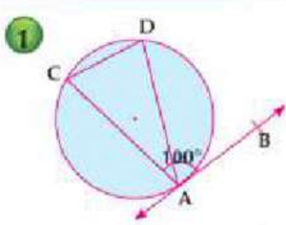
Remarque importante :

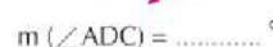


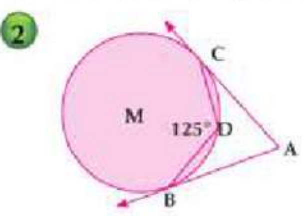
Si un angle inscrit est tracé sur la corde d'un angle tangentiel et si les deux angles sont d'un même côté par rapport à la corde, alors ils sont supplémentaires.

Dans la figure, ∠ ABC et ∠ AEB sont supplémentaires.

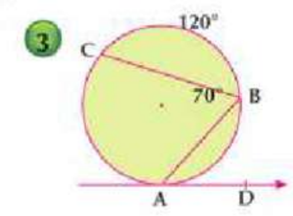
Pour t'entraîner : **A l'aide des données de la figure, trouve**

1. 


m (∠ADC) = ... °

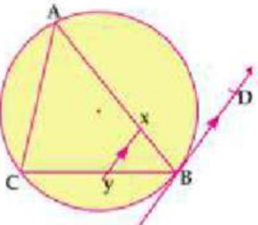
2. 

m (∠ BAC) = ...°

3. 

m (∠ BAD) =..........°





ABC est un triangle inscrit dans un cercle et $\overleftrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B. $X \in \overline{AB}$ et $Y \in \overline{BC}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overleftrightarrow{BD}$.

Démontre que : AXYC est un quadrilatère inscriptible.

Démonstration :

∵ $\overleftrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B et $\overline{AB}$ est une corde qui passe par le point de contact

∴ m (∠DBA) = m (∠C)

∵ $\overline{XY}$ // $\overleftrightarrow{DB}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ *est une sécante*

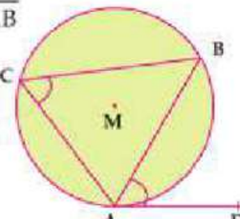
∴ m (∠ DBA) = m (∠BXY) ∴ m (∠BXY) = m (∠C)

∵ ∠BXY est un angle extérieur au quadrilatère XYCA.

∴ XYCA est un quadrilatère inscriptible

Réciproque du théorème 5

Si une demi-droite est tracée en l'une des deux extrémités d'une corde dans un cercle de sorte que la mesure de l'angle compris entre cette demi-droite et la corde est égale à la mesure de l'angle inscrit tracé sur cette corde de l'autre côté, alors cette demi-droite est une tangente au cercle.

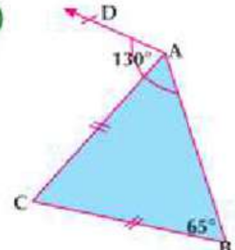


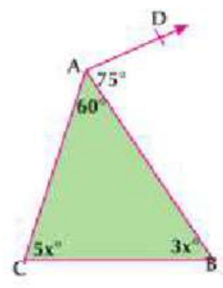
C'est-à-dire si on trace $\overrightarrow{AD}$ en l'une des deux extrémités de la corde $\overline{AB}$ dans le cercle M et si:

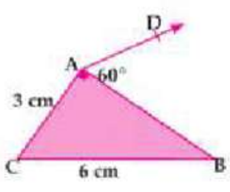
m (∠ DAB) = m (∠ C) **alors :** $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle M .

Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, montre que $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les sommets du △ ABC.

Exemple (4)

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en A , X ∈ $\overline{AB}$ et Y ∈ $\overline{AC}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$

Démontre que: $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A, X et Y

Solution

Hypothèses : $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en , $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$

Conclusion : **Démontre que** : $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A , X et Y.

Démonstration : ∵ $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente et $\overline{AB}$ est une corde


∴ m (∠ D A B) = m (∠ C)  (1)

∵ $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ *est une sécante* ∴ m (∠ AYX) = m (∠ C)  (2)

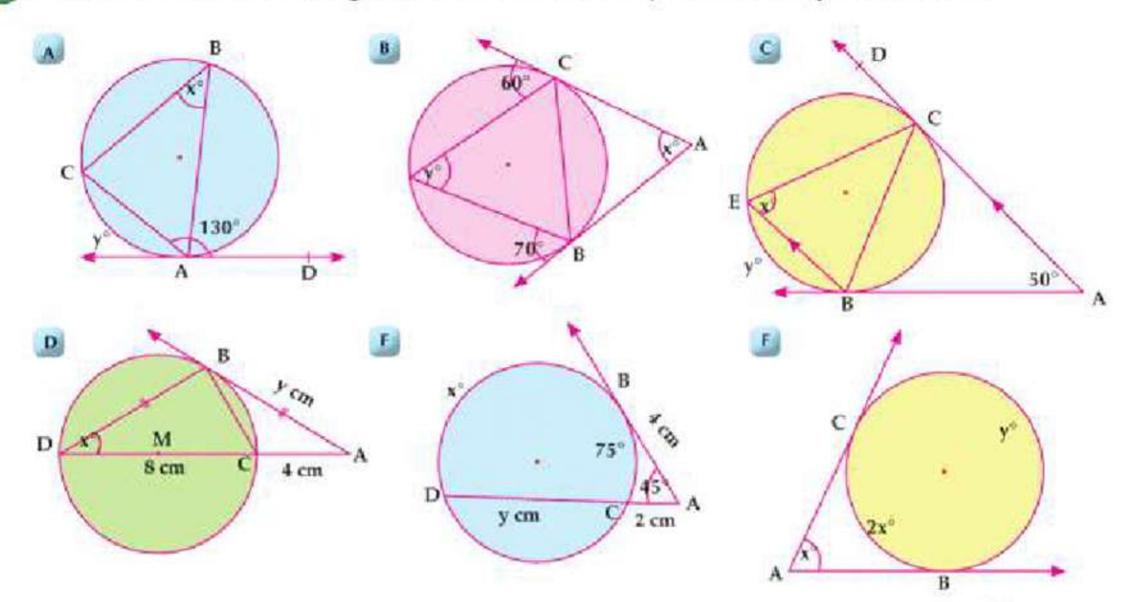
De (1) et (2) on déduit que: m (∠ DAB) = m (∠ AYX)

Donc : m (∠ DAX) = m (∠ AYX)

∴ $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A, X et Y .

Exercices 5-7

1 **A l'aide des données de la figure, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure.**



2 ABCD et un quadrilatère inscrit dans un cercle. E est un point extérieur au cercle, $\overrightarrow{EA}$, et $\overrightarrow{EB}$ sont deux tangentes au cercle en A et B. Si m (∠ AEB) = 70° et m (∠ ADC) = 125°

démontre que : **(1)** AB = AC

(2) : $\overleftrightarrow{AC}$ est une tangente au cercle passant par les points A, B et E

3 ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle. Ses diagonales se coupent en E. On trace, $\overleftrightarrow{XY}$ tangente au cercle en C telle que $\overleftrightarrow{XY}$ // $\overline{BD}$.

Démontre que: **(1)** $\overrightarrow{AC}$ est une bissectrice de ∠ BAD

(2) $\overleftrightarrow{BC}$ est une tangente au cercle passant par les sommets du ABE

4 ABCD est un parallélogramme tel que AC = BC.

Démontre que : $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.



Exercices généraux



1 $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M, m (∠ BAC) = 65° où C ∈ cercle , D ∈ $\widehat{BC}$

Trouve m (∠ ACB), m (∠ CDB)

2 $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont deux rayons perpendiculaires d'un cercle M,qui se coupent en E

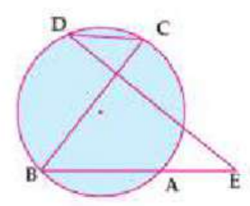
A *Trouve* m (∠ CBD)

B **Démontre que :** $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{BC}$

3 **Dans la figure ci-contre :**

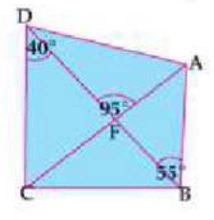
E est un point à l'extérieur du cercle.

Démontre que : m (∠ E) < m (∠ BCD)

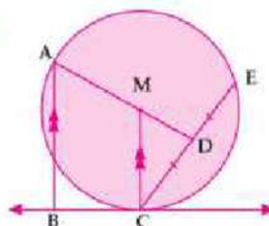


4 **Dans chacune des figures suivantes, démontre que la figure ABCD est un quadrilatère inscriptible:**

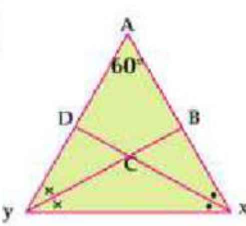








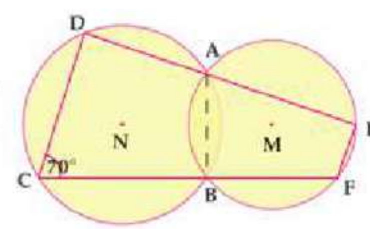
C



5 ABCD est un parallélogramme. Le cercle passant par les points A, B et D coupe $\overline{BC}$ en E

Démontre que: CD = ED

6 M et N sont deux cercles sécants en A et B. On trace $\overleftrightarrow{AD}$ qui coupe le cercle en M en E et le cercle N en D. On trace. $\overleftrightarrow{BC}$ qui coupe le cercle en M en F et le cercle N en C, m (∠ C) = 70°.



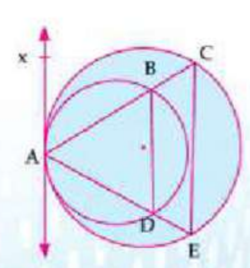
A *Trouve* m (∠ F)

B **Démontre que** $\overleftrightarrow{CD}$ // $\overleftrightarrow{EF}$.

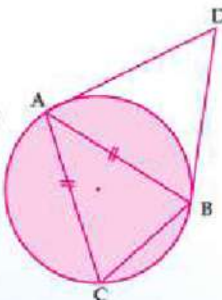


7 **A l'aide des données de la figure, démontre que :**

A $\overline{BD}$ // $\overline{CE}$



B $\overline{AC}$ est une tangente au cercle passant par les sommets du triangle ABD



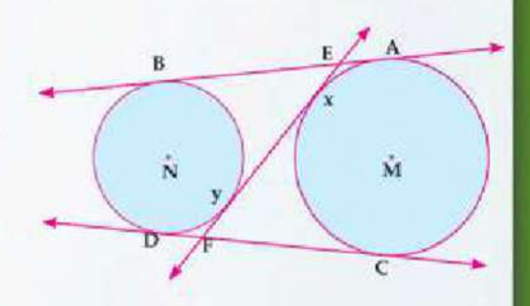




Portfolio

1 Dans la figure ci-contre :

Tout point du cercle N se trouve à l'extérieur du cercle M. Les deux points E et F sont les points d'intersection d'une tangente commune intérieure aux deux cercles $\overleftrightarrow{XY}$ avec les deux tangentes communes extérieures aux deux cercles $\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{CD}$ respectivement:



A Quelle est la relation entre les longueurs de $\overline{EF}$, et $\overline{AB}$? Justifie ta réponse.

B **Pour chercher :** La relation entre les longueurs de $\overline{EF}$, et $\overline{AB}$ change-t-elle dans les cas suivants ?

(1) si M et N sont deux cercles superposables.

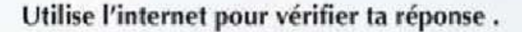
(2) si la surface du cercle M $\cap$ la surface du cercle N = { Z }

2 Problème d'Apollonius :

La figure ci-contre représente trois cercles de rayons différents

Combien de cercles tangents aux trois cercles donnés peut-on tracer ?

Ce problème est connu par « les cercles d'Apollonius ». Apollonius est un astronaume, ingénieur et mathématicien grec célèbre (né à Berg en 262 av. J.-C. et mort à Alexandrie en 190 av. J.-C.).



Utilise l'internet pour vérifier ta réponse .



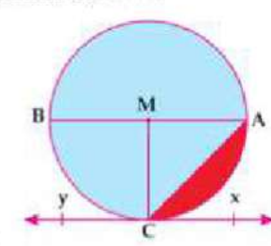

Epreuve de l'unité

1 **(1) Complète :**

A Dans un quadrilatère inscriptible, les angles opposés sont ....

B Le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection de ....

(2) Dans la figure ci-contre:



M est un cercle de rayon de longueur 7cm,

$\overline{AB}$ est un diamètre et $\overleftrightarrow{XY}$ est une tangente au cercle en C

et $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{AB}$.

Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées: ($\pi = \frac{22}{7}$)

1 m ($\widehat{BC}$)= ....

A 45 °   B 60 °

C 90°   D 180°

2 longueur de l'arc $\widehat{AC}$ = ...

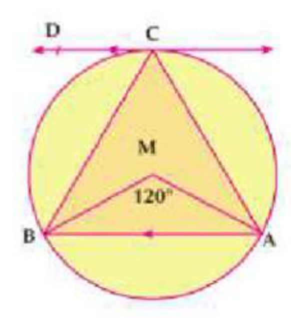
A 11 cm   B 22 cm

C 33 cm   D 44 cm

3 L'aire de la région rouge = ...

A 154 cm^2 B 77 cm^2

C 38.5 cm^2 D 14 cm^2



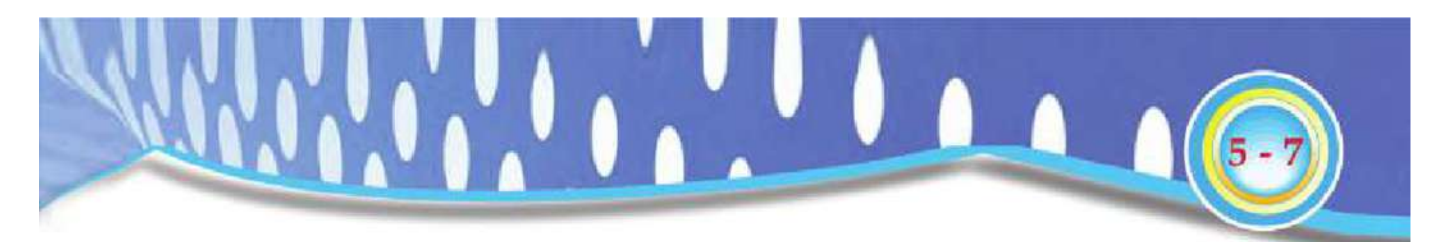
2 **Dans la figure ci-contre:**

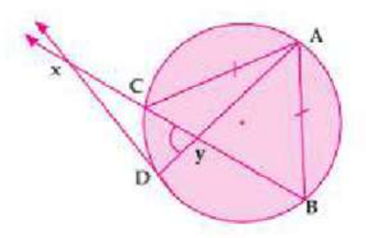
$\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle en C, $\overleftrightarrow{CD} // \overline{AB}$,

m ($\angle$ AMB) = 120°

Démontre que : le triangle CAB est équilatéral.





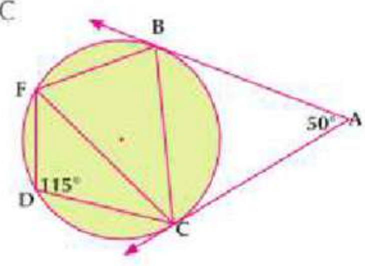


3 ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que AB = AC

$D \in \overset{\frown}{BC}$, On trace $\overrightarrow{DX}$ tangente au cercle en D

telle que $\overrightarrow{DX} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{X\}$, $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{Y\}$.

Démontre que : XY = XD



4 **Dans la figure ci-contre :**

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C

m $(\angle A) = 50°$, m$(\angle CDE) = 115°$

Démontre que: (1) $\overrightarrow{BC}$ est une bissectrice de $\angle ABE$

(2) CB = CE

Exercices généraux

et

Modèles D'examens



Modèle d'examens d'algèbre et statistique 1er modèle

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

Répondre aux questions suivantes:

Question (1) : Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(1) L'ensemble de definition de la fonction n (x) = $\frac{x}{x-1}$ est ....

(a) R – {0} (b) R – {1} (c) R – {0 ; 1} (d) R- {-1}

(2) Le nombre de solutions de deux equations, x + y = 2 et y + x = 3 est ....

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(3) Si $x \neq 0$, alors $\frac{5x}{x^2+1} \div \frac{x}{x^2+1}$ = ...

(a) - 5 (b) - 1 (c) 1 (d) 5

(4) Si le rapport entre les périmètres de deux carrés est 1 : 2 , alors le rapport entre leurs aires = ... : ....

(a) 1 : 2 (b) 2 : 1 (c) 1 : 4 (d) 4 : 1

(5) L'équation de l'axe de symétrie de la fonction f où f (x) = $x^2 - 4$ est ....

(a) x = - 4 (b) x = 0 (c) y = 0 (d) y = - 4

(6) Si $A \subset E$ d'une experience aléatoire et P (A') = 2 P (A), alors P (A) = ...

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

Questions (2):

a) En utilisant la formule général, résoudre l'équation suivante dans R ; $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Écris les résultats à une décimale près.

b) Simplifie la fonction n (x), et determine son ensemble de definition sachant que:

$$n(x) = \frac{x-3}{x^2-7x+12} - \frac{4}{x^2-4x}$$

Questions (3):

a) Détermine l'ensemble solution du système d'équations suivantes:

X – y = 0 ; $x^2 + xy + y^2 = 27$



b) Simplifie la fonction n (x), et determine son ensemble de definition sachant que:

$$n(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^3-27} \div \frac{x+3}{x^2+3x+9}$$

Puis trouve: n (2) ; n (-3) s'il est possible.

Questions (4):

a) La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 4 cm. Si le perimeter du rectangle est égal à 28 cm, trouve son aire.

b) Si $n(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$ trouve:

(1) $[n(x)]^{-1}$ en determinant son domaine de definition.

(2) Si $[n(x)]^{-1} = 3$, trouve la valeur de x.

Questions (5):

a) Si $n_1(x) = \frac{x^2}{x^3-x^2}$ et $n(x) = \frac{x^3+x^2+x}{x^4-x}$

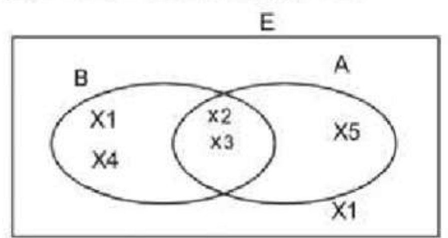
b) Dans la figure ci-contre:

Si A et B sont deux évènements d'une espace des éventualités, trouve

(1) P (A ∩ B)

(2) P (A – B)

(3) La probabilité du non réalization de l'événement A.



Modèle d'examens d'algèbre et statistique 2ème modèle

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

Répondre aux questions suivantes:

Question (1) : Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(1) L'ensemble solution de deux 'equations $x = 3$ et $y = 4$ est …………..

(a) $\{(3 ; 4)\}$ (b) $\{(4 ; 3)\}$ (c) R (d) $\varnothing$

(2) L'ensemble des zeros de la fonction f où $f(x) = x + 4$ est …….

(a) $\{2\}$ (b) $\{2 ; -2\}$ (c) R (d) $\varnothing$

(3) Si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cap B) =$ ……………

(a) zéro (b) 1 (c) 0,5 (d) $\varnothing$

(4) Le domaine de definition de l'inverse de la fonction $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ est ……………

(a) $\mathbb{R}-$ (b) $\mathbb{R} - \{-2 ; 3\}$ (c) $\mathbb{R} - \{3\}$ (d) $\mathbb{R}$

(5) Les deux droites $3x + 5y = 0$ et $5x - 3y = 0$ se coupent au ………..

(a) 1er quadrant (b) 2ème quadrant (c) point d'origine (d) 3ème quadrant

Questions (2):

a) En utilisant la formule général, résoudre l'équation suivante dans R; $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Écris les résultats à deux décimale près.

b) Simplifie la fonction N (x), et détermine son ensemble de definition sachant que:

$$N(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + x + 6} \times \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 4}$$

Questions (3):

a) Détermine l'ensemble solution du système d'équations suivantes:

$x - y = 1$; $x^2 + y^2 = 25$

b) Si A et B sont deux évènements d'une espace des éventualités, si $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,2$ trouve $P(A \cup B)$; $P(A - B)$

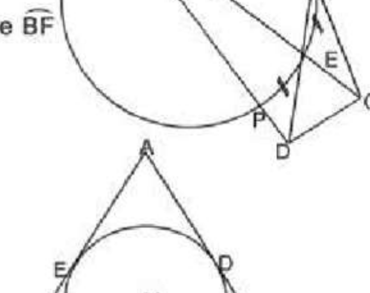
Questions (3):

a) Cite deux cas pour qu'un quadrilatère soit inscriptible.

b) **Dans la figure ci-contre**:

$\overline{BC}$ est tangent au cercle en B, E est la milieu de $\widehat{BF}$

Démontrer que: ABCD est inscriptible



Questions (4):

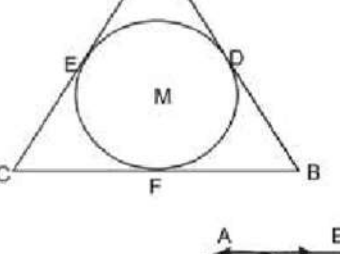
a) **Dans la figure ci-contre:**

Le cercle M est inscrit dans le triangle ABC

AD = 5 cm; BF = 4 cm et CE = 3 cm

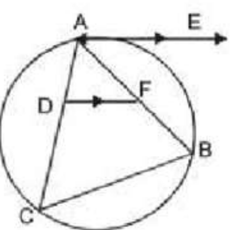
Détermine par une demonstration le perimeter

Du triangle ABC



b) **Dans la figure ci-contre:** $\overrightarrow{AE}$ est tangent au cercle en A,

$\overline{AE} \mathbin{/\!/} \overline{DF}$; Démontrer que: DFBC est inscriptible

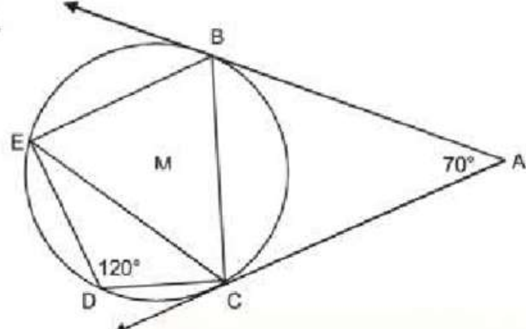


Questions (5): Dans la figure ci-contre:

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux tangents au cercle M en B et C.

m ($\angle$ A) = 70°; m ($\angle$ CDE) = 125°.

Démontrer que: CB = CE



Modèle d'examens de Géométrie pour les élèves intégrés

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

Répondre aux questions suivantes:

Question (1) : Complète:

(1) La plus longue corde dans le cercle est appelée = ...

(2) La droite passant par le centre du cercle et par le milieu d'une corde est ....

(3) Les Deux segments tangents à un cercle issu d'un point extérieur au cercle .... Longueur.

(4) **Dans la figure ci-contre:** la longueur de $\overline{MD}$ = ... cm.

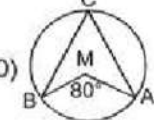
(5) Le nombre d'axes de symétrie d'un cercle est ....

(6) Si $\overline{AC}$ est un diameter dans le cercle M, Alors m $(\widehat{AC})$ = ... °

Question (2) : Choisis la bonne réponse:

(1) Si le point A ∈ au cercle M de 6 cm de diameter, alors MA = ... cm (3 ; 4 ; 5 ; 6)

(2) **Dans la figure ci-contre :** m ($\angle$ ACB) = ... ° (40 ; 80 ; 90 ; 180)



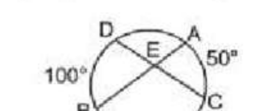
(3) Le nombre de tangents communes aux deux cercles disjoints extérieurement est .... (1 ; 2 ; 3 ; 4)

(4) **Dans la figure ci-contre:** la longueur de $\overline{BC}$ = ... cm. (3 ; 4 ; 5 ; 6)

(5) Le nombre de cercles passant par les extrémités du segment $\overline{AB}$ est .... (1 ; 2 ; 3 ; une infinite)

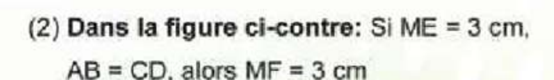
(6) Dans la figure ci-contre:

m ($\angle$ AEC) = ... ° (25 ; 50 ; 75 ; 100)

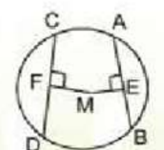


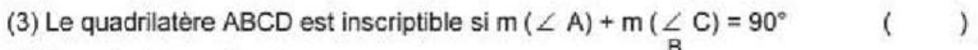
Question (3) : Met le signe (√) ou (X) :

(1) Deux cercles M et N sont tangents extérieurement de rayons 5 cm et 3 cm, alors MN = 15 cm. (   )

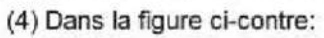


(2) **Dans la figure ci-contre:** Si ME = 3 cm, AB = CD, alors MF = 3 cm (   )



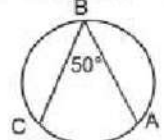


(3) Le quadrilatère ABCD est inscriptible si m ($\angle$ A) + m ($\angle$ C) = 90° ( )



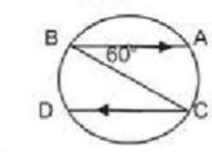
(4) Dans la figure ci-contre:

m ($\widehat{AC}$) = 100° ( )



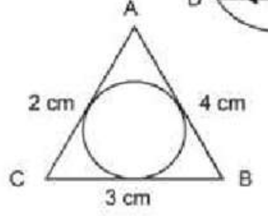
(5) Dans la figure ci-contre:

m ($\widehat{AB}$) + m ($\widehat{CD}$) = 300° ( )



(6) Dans la figure ci-contre:

Le perimeter du Δ ABC = 9 cm ( )



Question (4) : Relie de la colonne (A) avec ce qui convient de la colonne (B)

(A)	(B)
1) La mesure d'un angle inscrit dans un demi-cercle = ...	130
2) **Dans la figure ci-contre :** m ($\angle$ A) = ... (figure: D, A, H, C, B)	90
3) **Dans la figure ci-contre:** $\overleftrightarrow{BD}$ est tangent au cercle en B, m ($\angle$ DBC) = 140°, alors m ($\angle$ A) = ... (figure: C, A, B, D)	30
4) La longueur de diameter du cercle passant par les sommets d'un triangle rectangle don't la longueur de son hypotenuse est 10 cm est égale à .... cm	5
5) **Dans la figure ci-contre:** ΔMAB est équilatérale; $\overline{BC}$ est tangent au cercle en B, Alors m ($\angle$MBC) = ... (figure: D, A, B, C)	40°
6) Le rapport entre la mesure d'un angle au centre et la mesure de l'angle inscrit interceptant meme arc est	1 : 2

Modèle 2

Répondre aux questions suivantes:

Question (1) : Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(1) La mesure d'un arc qui représente la moitié de la mesure d'un cercle = ...

(a) 360° (b) 180° (c) 120° (d) 90°

(2) Le nombre des tangents communes aux deux cercles tangents extérieurement est ....

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(3) La mesure d'un angle inscrit dans un demi-cercle = ...

(a) 45° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

(4) L'angle tangential est un angle compris entre ....

(a) deux cordes (b) deux tangents

(c) une corde et une tangent (d) une corde et un diameter

(5) ABCD est un quadrilatère inscriptible; si m ($\angle$ A) = 60°, alors m ($\angle$ C) = ...

(a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120°

(6) Deux cercles M et N sont tangents intérieurement de rayons 5 cm et 9 cm, alors MN = ... cm

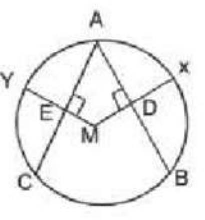
(a) 14 (b) 4 (c) 5 (d) 9

Question (2) :

(a) Dans la figuier ci-contre:

AB = AC $\overline{MD} \perp \overline{AB}$ et $\overline{ME} \perp \overline{AC}$

Démontrer que XD = YE

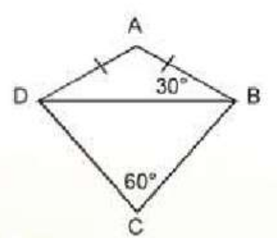


(b) Dans la figure ci-contre:

ABCD est un quadrilatère dans lequel

AB = AD, m ($\angle$ ABD) = 30°et m ($\angle$ C) = 60°

Démontre que: ABCD est un quadrilatère inscriptible.



Question (3) :

(a) **Dans la figure ci-contre:** Dexu cercles tangents en B

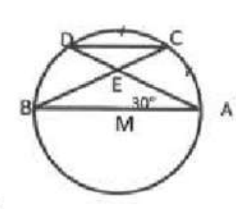
, $\overrightarrow{AB}$ est une tangent commune au deux cercles,

$\overline{AC}$ est tangent au petit cercle, $\overline{AD}$ est tangent au grand cercle

AC = 15 cm, AB = (2 x – 3) cm, AD = (y – 2) cm.

Trouve la valeur de x et y.

(b) Dans la figure ci-contre:



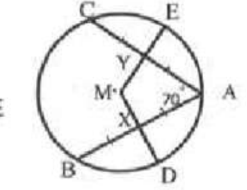
$\overline{AB}$ est un diameter dans le cercle M, C ∈ au cercle

M (∠ CAB) = 30°, D est lemilieu de ($\overset{\frown}{AC}$) ; $\overline{DB} \cap \overline{AC}$ = {E}

Trouve: (1) m ($\overset{\frown}{AD}$) ; m (∠ BDC) (2) Démontre qu $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Question (4) :

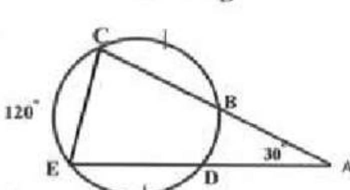
(a) **Dans la figure ci-contre:** $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes de mêm longueurs dans le cercle M , X est le milieu de $\overline{AB}$,



Y est le milieu de $\overline{AC}$; m (∠ CAB) = 70°

(1) Calcule: m (∠ DME) (2) Démontre que XD = YE

(b) **Dans la figure ci-contre:** m (∠ A) = 30°, m ($\overset{\frown}{EC}$) = 120°



m ($\overset{\frown}{BC}$) = m ($\overset{\frown}{DE}$) . (1) trouve: m ($\overset{\frown}{BDE}$)

(2) Démontre que AB = AD

Question (5) :

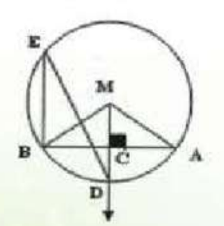
(a) Dans la figure ci-contre:

$\overline{DA}$ et $\overline{DB}$ sont deux segments

tangents au cercle M, AB = AC

Démontre que $\overline{AC}$ est une tangent passant par les somments du triangle ABD

(b) Dans la figure ci-contre:



C est le milieu de $\overline{AB}$; $\overrightarrow{MC}$ ∩ le cercl e

M = {D}, m (∠ MAB) = 20°

Trouve : (1) m (∠ BED) (1) m ($\overset{\frown}{AEB}$)

Modèle d'examens de Géométrie 1er modèle

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

Répondre aux questions suivantes:

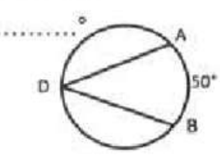
Question (1) : Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(1) L'angle inscrit dans un demi-cercle est ....

(a) aigu (b) obtus (c) plat (d) droit

(2) **Dans la figure ci-contre**: m $(\widehat{AB})$ = 50°; alors m (∠ADB) = ...°

(a) 25 (b) 50 (c) 100 (d) 150

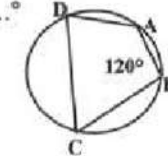


(3) Le nombre des axes de symétrie d'un cercle est ....

(a) Zéro (b) 1 (c) 2 (d) infinités

(4) **Dans la figure ci-contre:** m (∠ A) = 120°; alors m (∠ C) = ...°

(a) 60 (b) 90 (c) 120 (d) 180



(5) Si la droite L est tangent au cercle de 8 cm de diameter,

alors la distance du centre du cercle à cette droite est égale à .... cm.

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8

(6) Si la surface d'un cercle M ∩ la surface d'un cercle N = {A} et la longueur de rayon de l'un de deux cercle est 3 cm, MN = 8 cm, alors la longueur de rayon de l'un de l'autre cercle = ... cm.

(a) 5 (b) 6 (c) 11 (d) 16

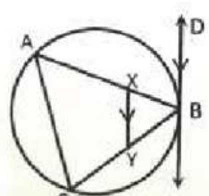
Question (2) :

(a) **Complète avec la demonstration:** Si un quadrilatère est inscriptible, alors les angles opposes sont ....

(b) **Dans la figure ci-contre :** $\overleftrightarrow{BD}$ est tangent au cercle en B,

x ∈ $\overline{AB}$ et y ∈ $\overline{BC}$, démontre que $\overline{XY}$ // $\overline{BD}$

Démontre que le quadrilatère AXYC est inscriptible.



Question (3) : Met le signe (√) ou (X)

1) Dans l'équation : $2x^2 - 5x - 4 = 0$, a = 1 ; b = - 5 , c = 4 ( )

2) La forme la plus simple de la fonction n (x) où $n(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$ est

$x + 1$ ( )

3) $\frac{x-1}{5} \times \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{5}$ où $x \neq \pm 1$ ( )

4) Si la somme de deux nombres est 3 et la somme de leurs carrés est 5, alors les deux nombres sont 1 et 2. ( )

5) Si A et B sont deux "evénements incompatibles alors P (A ∩ B) = 1 ( )

6) Si la probabilité que une équipe gagne = 0 , 7 , alors la probabilité que il ne gagne pas, est 0 , 3 ( )

Question (4) : Relie de la colonne (A) avec ce qui convient de la colonne (B)

(A)	(B)
(1) L'ensemble de solution de deux equations x = 2 ; y – 1 = 0 est	(2 ; 1)
(2) L'ensemble de solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est	$\frac{x}{x^2+4}$
(3) Si $n(x) = \frac{x-1}{x+1}$, alors le domaine de definition de $[n(x)]^{-1}$ = ...	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
(4) Si $n_1 = n_2$ et $n_1(x) = \frac{5x}{5x^2+20}$, alors n_2 = ...	R – {1 ; -1}
(5) L'ensemble des zeros de la fonction $f(x) = \frac{x-5}{x}$ est	$\frac{1}{3}$
(6) Dans la figure si contre: P (A – B) = ...	{5}

Modèle d'examens d'algèbre pur les élèves intégrés

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة

Répondre aux questions suivantes:

Question (1) :

(1) La probabilité de l'événement impossible = ...

(2) La forme la plus simple de la fraction $\frac{x-3}{x^2-5x+-6}$ est ....

(3) Si A $\subset$ E d'une experience aléatorie et P (A) = $\frac{1}{3}$ alors P (A') = ...

(4) L'équation $3x - x^2 + 1 = 0$ due .... Degree.

(5) Le point d'intersection des deux droites x = - 1 et y = 1 est situé au .... quadrant.

(6) L'ensemble des zeros de la function f où f (x) = x – 5 est ....

Question (2) : Choisis la bonne réponse:

1) L'ensemble solution de deux equations x = 2 et x y = 6 est ....

(a) {(2 ; 3)} (b) {2 ; 3} (c) {(3 ; 2)} (d) {3}

2) La fonction f où f (x) = $\frac{x-2}{x-5}$ admet un opposé dans le domaine ....

(a) ℝ - (b) ℝ - {5} (c) ℝ - {2 ; 5} (d) {2 ; 5}

3) L'opposé de $\frac{3}{x^2+1}$ est ....

(a) $\frac{-3}{x^2+1}$ (b) $\frac{x^2+1}{-3}$ (c) $\frac{x^2+1}{3}$ (d) $\frac{x^2-1}{3}$

4) Le domaine de définition de f (x) = $\frac{x+2}{x-1}$ est ....

(a) ℝ - {-2} (b) ℝ - {1} (c) ℝ - {1 ; - 2} (d) ℝ - {2}

5) Si y = 2 ; $x^2 - y^2 = 5$, alors x = ...

(a) – 3 (b) 3 (c) $\pm$ 3 (d) 9

6) Les droites x + 2 y = 1 ; 2 x + 4 y = 6 sont ....

(a) parallèles (b) secants (c) perpendiculaires (d) confondus



Question (4) :

a) Résoudre les equations dans R x R : $2x - y = 3$ et $x + 2y = 4$

b) Simplifie la fonction n (x), et determine son ensemble de définition sachant que:

$$n(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 9} : \frac{2x}{x+3}$$

Question (5) :

a) Simplifie la fonction n (x), et determine son ensemble de définition sachant que:

$$n(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Trace la courbe représentative de la fonction f où $f(x) = x^2 - 1$ sur l'intervalle [-3 ; 3].

Du graphique, trouve l'ensemble solution de l'équation: $x^2 - 1 = 0$

المواصفات الفنية:



رقم الكتاب:	٨٠٨٩
مقاس الكتاب:	$\frac{١}{٨}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبع المتن:	٤ ألوان
طبع الغلاف:	٤ ألوان
ورق المتن:	٨٠ جم أبيض
ورق الغلاف:	٢٠٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٥٦ صفحة

http://elearning.moe.gov.eg